CLAVIS MATHEMATICA

denuò LIMATA,

Sive potius

FABRICATA.

Cui accedit

Tractatus de Resolutione Æquationum qualitercunque adfectarum in numeris:

Et

Declaratio tum decimi elementi *Euclidis* de lateribus incommensurabilibus: tum decimi tertii & decimi quarti elementi de quinque solidis Regularibus.

Atque hic passim

Logistica decimalis, & *Logarithmorum* Doctrina intexitur.

Autore Gulielmo Oughtredo *Anglo.*

LONDINI,

Excudebat *Thomas Harper*, sumptibus *Thomæ Whitakeri*, apud quem venales sunt, in Cœmiterio *D. Pauli*, 1648.

CLAVIS MATHEMATICÆ DENUO LIMATA.

Cap. I. *De Notatione.*

1. TAbella admodum utilis, non modò pro numerorum Notatione, quam primâ facie exhibet; sed etiam in omni computatione per numeros tum communes, tum figuratos, tum artificiales, qui vulgò Logarithmi dicuntur.

		Integri											Partes.						
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	&c.
M	M	M	M	M	M	M	C	X	I	X	C	M	M	M	M	M	M	M	
M	M	M	M	C	X	I							X	C	M	M	M	M	
M	C	X	I													X	C	M	

2. In hâc tabellâ numeri superiores sunt Indices sive exponentes terminorum utrinque ab unitate continuè proportionalium, affirmativi in integris, negativi in partibus. Estque progressio in decuplâ ratione versus sinistram, & in subdecuplâ versus dextram, sicut literæ numerales subscriptæ ostendunt. Est igitur pro-

greſſio ab unitate in integris, 1, 10, 100, 1000, 10000: Et in partibus, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$: Et ſic in infinitum.

3. Atque hoc modo in omni aliâ Progreſſione, terminis ab unitate quacunque ratione ſive creſcentibus, ſive decreſcentibus, Indices ſui erunt adponendi.

4. Tabellam quidem in decimali ratione ordinavi, tum ut numerorum quorumcunque (ſive Integri ſint, ſive partes, ſive mixti) valores per gradus & periodos æſtimentur: tum quia Logiſtica hæc decimalis ſexagenariâ, in computationibus Aſtronomicis multò facilior eſt atque concinnior. Hoc planè perſpexit, quicunque is fuit, qui primus canonem Sinuum à ſemidiametro 60, ad I cum circulis annexis, revocavit. Utinam idem etiam in aliis canonibus fierit.

5. Partes decimales ſcribuntur in unâ lineâ cum integris, diſtinguuntur autem lineolâ rectangulari, quæ idcircò ſeparatrix dicitur. Et quemadmodum in integris, quilibet ab unitatum loco gradus augetur versùs ſiniſtram decuplando: ſic in partibus decimalibus, quilibet ab unitatum loco gradus minuitur verſus dextram ſubdecuplando.

6. Partes decimales denominationem ſuam ſortiuntur à loco figuræ ſuæ ultimæ: ut 0|5 ſunt 5 decimæ partes: 0|56 ſunt 56 centeſimæ partes: 0|056 ſunt 56 mileſimæ partes, & ſic de reliquis omnibus.

7. Circuli ante integros, vel poſt partes decimales nihil valent: at verò poſt integros, & ante partes decimales (hoc eſt utrinque lineæ ſeparatrici proximi) vim ſuam

ſuam retinent : nam gradus conſtituunt quibus figurarum valores cenſentur: ut, 0005, ſignificant tantummodo 5 : & 0|500, 5 decimæ partes.

8. Quare in partibus decimalibus ſcribendis, linea ſeparatrix ſemper adponatur; & loci, ſi qui ſunt, vacui, circulis ſuppleantur : ut 0|0005 ſunt 5 centies milleſimæ partes.

9. Signum addendi ſive adfirmationis eſt + plus, ſive pl: ut 34, vel + 34.

10. Signum minuendi ſive negationis eſt — minus, ſive mi : ut — 34, negantur omninò eſſe.

11. Pertinet autem ſignum ad magnitudinem ſequentem, cui præfigitur. Et omnis magnitudo, cui non eſt præfixum ſignum negationis, intelligitur eſſe adfirmata, & habere ſignum +, licet non ſit expreſſum.

12. Et nota quod ſignis + & - utor, quando ſimplex magnitudo adfirmatur vel negatur de ſimplice: ſignis autem pl : & mi, quando magnitudo compoſita adfirmatur vel negatur de ſimplice, vel ſimplex de compoſitâ.

13. Magnitudines denotari poſſunt vel numeris menſuram ipſarum ſignificantibus, vel etiam ſpeciebus : ut linea longa ſeptem uncias, deſignatur vel per 7; vel per unam aliquam literam aut notam, A, B, C, &c; vel per duas literas terminis lineæ adſcriptas, AB, BC, CD, &c pro libitu : modò memoriâ teneas pro quâ magnitudine ſpecies quælibet ſtatuitur.

14. Speciosa hæc Arithmetica arti Analyticæ (per quam ex ſumptione quæſiti, tanquam noti, inveſtiga-

tur quæsitum) multo accommodatior est, quam illa numerosa. Nam in numerosâ, numeri à novo, quem proferunt, ita absorbentur, ut penitus disparcant, nec ullum sui vestigium relinquant: At in speciosâ, permanent species sine aliquâ mutatione, specimen exhibentes totius operationis: unde non solùm in quæsiti notitiam ducunt, sed etiam Theorema generale pro solutione consimilium quæstionum, in aliis magnitudinibus datis, edocent.

CAP. II. *De Additione.*

1. NUmerus inventus per Additionem, dicitur Summa, vel Aggregatum. Ut 3 & 7 constituunt 10.

2. Additio incipit ad dextram, & summas singulorum locorum particulares inventas subscribit, in locis suis propriis.

3. In Additione omnes numeri dati simul æquantur Summæ.

Exempla Additionis.

79403	3794|236	l.	s.	d.
8956	584|3	17	13	4
67293	947|08	9	16	7
5087	4720|7439	238	09	6
160739	48|5	70	00	10
		48	10	3
	10094|8599	384	10	6

4. Additio

4. Additio speciosa conjungit omnes magnitudines datas servatis signis

ad	3A	A	5A	3A	A
adde	A	-A	-3A	-5A	E
Summa	3A+A	A-A	5A-3A	3A-5A	A+E
hoc est	4A	0	2A	-2A	

ad	A+B	A+B
adde	A-B	A-C
Summa	2A	2A+B-C

Sic in Indicum Additione 3 | 3, 2 | 2, 1 | 1

Cap. III. *De Subductione.*

1. NUmerus inventus per Subductionem dicitur Reliquus, vel Differentia, vel Excessus. Ut è 7 tolle 3, restat 4.

2. Subductio incipit ad dextram, & differentias singulorum locorum particulares inventas subscribit, in locis suis propriis.

3. In Subductione, numerus subducendus, unà cum differentiâ, æquatur numero ex quo.

Exempla Subductionis.

347206836	3794,236	l.	s.	d.
6807592	947,08	17	13	4
		9	16	7
340399244	2847,156	7	16	9

4. Sub-

4. Subductio speciosa conjungit utramque magnitudinem datam, mutatis omnibus signis magnitudinis subducendæ.

Ex- 4 A	3 A	5 A	A
tolle A	5 A	-3 A	E
Restat 4 A-A	3 A-5 A	5 A+3 A	A-E
hoc est 3 A	-2 A	8 A	

Ex- A	A	Sic in Indicum subductione.	3 | 3
tolle B+C	B-C		2 | 2
Restat A-B-C	A-B+C		5 | 5

Cap. IV. De Multiplicatione.

1. Numerus inventus per Multiplicationem, dicitur Factus, vel Productus, vel Rectangulum, vel Planum. Nam unus è numeris propositis habetur pro longitudine, alter pro latitudine: & numeri propositi dicuntur Factores atque Latera. Maxima binarum magnitudinum potestas, est figura ex ipsis composita, cujus anguli sunt recti, & latera parallela.

2. Multiplicatio incipit ad dextram, & singulas figuras unius numeri dati, in singulas alterius figuras ducit: & factos demum, habitâ locorum ratione, in unam summam colligit. Et si partes decimales numeris propositis sint admixtæ, è toto facto tot locos lineâ separatrice abscindit, quot sunt loci partium in

utroque factore. Nam in Multiplicatione Index cujusque particularis figuræ facti, invenitur addendo Indices figurarum multiplicatæ & multiplicantis, sic 58,73 ductus in 600, facit 35238. Nam Index figuræ $\bar{6}$ in 600, est 2: & Index ultimæ figuræ 3 in 58,73 est $\bar{2}$, addantur Indices 2 & $\bar{2}$, extabit 0 pro Indice ultimæ figuræ facti 35238: quæ ideo eò pertinet ad locum unitatum. Et consimilis reliquarum figurarum in facto censura gradualis institui poterit.

3. Si è numeris propositis, unus, vel uterque, adjunctos habeat ad dextram circulos: omissis circulis, fiat ipsorum numerorum Multiplicatio: & facto demùm tot insuper integrorum loci accenseantur, quot sunt omissi circuli in utroque factore.

4. In Multiplicatione est, ut unitas, ad unum è factoribus: Sic alter è factoribus, ad factum. Ut si ducatur 4 in 6 fiet 24: Est igitur 1.4 :: 6.24: vel 1.6 :: 4.24.

Exempla Multiplicationis.

```
   4576        58034
    892          475
 -------     --------
    9152      290170
   41184     406238
  36608     232136
 -------     --------
 4081792     2756 6150
```

```
       358        58,73
       600          600
    ------       ------
    214800        35238
```

 5. Con-

5. Contractio Multiplicationis, in Logiſticâ valdè utilis, ſic eſt. Si inſtituto tuo ſufficiat habere factum non integrum, ſed multatum aliquot ex ultimis figuris: ſtatues unitatis locum minoris numeri, ſub illâ figurâ majoris, cujus Index æqualis ſit numero figurarum, vel abſcindendarum in integris vel relinquendarum in partibus decimalibus: Et reliquas figuras minoris numeri, ſub numero majore ordine inde contrario. Tum in multiplicando incipies ubique ad illam figuram majoris numeri, quæ eſt ſupra eam figuram minoris, quâ multiplicatur: habitâ tamen ratione incrementi, quod ex ſubſequentibus figuris majoris numeri ſuppeditatur. Hujus compendii caſus ſunt quatuor.

Caſus I. Si velis factum habere purum à partibus: Statues unitatis locum minoris ſub unitatis loco majoris. Ut in exemplo, ubi 246,914 ductus in 35,27 producit 8708 integros, abſciſſis omnibus partibus decimalibus.

246,914
72,53
7407
1235
49
17
8708

Caſus II.

Casus II. Si velis habere factum cum locis aliquot partium puta quatuor: Statues unitatis locum minoris numeri sub quarto loco partium majoris. Ut in priore exemplo, factus erit 8708,6568 mixtus cum quatuor locis partium.

24691,4
7253
74074200
12345700
493828
172840
8708,6568

Casus III. Si velis factum multatum aliquot locis integrorum, puta quinque: statues unitatis locum minoris numeri loco quinto ante unitatis locum majoris. Ut in exemplo, ubi 80902 sinus graduum 54 multiplicandus est per 39875 sinum maximæ declinationis 23° 30: prodibit 32266 sinus declinationis solis ad ♉ 24°.

80902
57893
24271
7281
647
63
4
32266

Casus IV. Si velis factum multatum locis integrorum, puta quinque, reparari aliquot locis partium, puta quatuor. Quia $5 + \bar{4} = 1$: Statues unitatis locum minoris numeri uno loco ante unitatis locum majoris. Ut in exemplo ubi sinus 42262 multiplicatur per 0,0064, ita ut abscissis à facto quinque figuris ultimis, restituantur quatuor loci partium: Factus erit 0,0027.

42262
46000
25
2
0,0037

6. Multiplicatio *speciosa* connectit utramque magnitudinem propositam cum notâ in vel ×: vel plerumque absque notâ, si magnitudines denotentur unicâ literâ. Et si signa sint similia, producta magnitudo erit adfirmata: sin diversa, negata. Effertur autem per in.

Et nota, quòd A in A, sive A × A, sive A A, est Aq. AAA sive AqA, est Ac. AAAA, sive Aq Aq, sive AcA, est Aqq. AAAAA, sive AcAq, sive AqqA, est Aqc. AAAAAA, sive Ac Ac, sive Aqq Aq, sive AqcA, est Acc, &c. Nam potestas qualibet superior fit ex duabus inferioribus, quarum dimensiones simul æquantur numero dimensionum superioris. Quot autem magnitudines sunt quæ multiplicantur, totidem sunt dimensiones.

Duc.	A	A+E	A−E	A+E+I	B+1
in	E	B	B	Z	A
fiet	AE	BA+BE	BA−BE	ZA+ZE+ZI	BA+A

Duc.	3A	AE	AE	A+E	A+E
in	2A	A	AE	A+E	A−E
fiet	6Aq	AqE	AqEq	Aq+AE +AE+Eq Aq+2AE+Eq	Aq+AE −AE −Eq Aq−Eq

Ad hunc etiam modum Multiplicatio fiet, si magnitudines constent binis literis. Ut si latus

AB

AB+CD multiplicandum sit in se, producetur quadratum ABq+2AB, CD+CDq.

Cap. V. De Divisione.

1. NUmerus inventus per Divisionem dicitur quotus, vel etiam Parabola: quia oritur ex adplicatione numeri plani ad longitudinem datam, ut inveniatur latitudo congrua. Et si numerus ad numerum adplicetur cum lineolâ interjectâ, ostendit quod numerus ille superior dividendus sit per inferiorem, ad quem adplicatur: ut $\frac{2}{2}$ & $\frac{5}{12}$.

2. Divisio incipit ad sinistram: & postquam ex dividendo sufficientem divisori dividuum distinxerit, & sub ipso divisorem subscripserit, vel saltem subscriptum cogitaverit: singulas figuras divisoris ex singulis ipsius dividui figuris supra stantibus, æqualiter, quoties fieri poterit, tollit: Tum divisore per quotum inventum multiplicato, factoque oblato ex dividuo, divisorem in locum proximè sequentem promovet, novamque uti prius divisionem instituit; donec totum dividendum percurrerit. Quilibet autem quotus particularis inventus, ejusdem debet esse loci, sive gradus, cujus est figura dividendi, quæ stat, vel cogitatur stare supra unitatis locum divisoris. Nam in Divisione, Index cujusque particularis figuræ Quoti, invenitur tollendo Indicem figuræ dividentis ex Indice figuræ divisæ. Sic 171|4 divisus per 857, dat 0|2 pro Quoto. Index enim primæ figuræ dividuæ 17 est 1; & Index primæ

primæ figuræ divisoris 8 est 2: Tollatur 2 ex $\bar{1}$, restabit $\bar{1}$ pro Indice primæ figuræ: quæ idcircò pertinet ad locum primum partium decimalium.

3. Et si divisor adjunctos sibi habeat ad dextram circulos; omissis circulis, & abscissis totidem ultimis figuris dividendi, in numeris reliquis fiat divisio. In fine autem divisionis restituendi sunt, tum omissi circuli, tum figuræ abscissæ.

4. In Divisione est, ut Divisor ad unitatem, sic dividuus ad Quotum: vel ut dividuus ad divisorem, sic Quotus ad unitatem. Ut diviso 24 per 6, quotus erit 4: Est igitur 6.1::24.4: Item 24.6::4.1.

5. Si magnitudo facta sit ex duabus magnitudinibus; una ex iis ipsam per alteram metietur.

6. In Multiplicatione, atque Divisione, unitas nihil mutat.

7. Si numerus numerum multiplicet, idemque factum dividat, nihil fit. Nam quod Multiplicatio conficit, Divisio dissolvit. Quare in adplicatione magnitudinis ad magnitudinem, si eadem magnitudo sit tum supra lineam, tum infra, expungatur utrobique.

Exempla

Exempla Divisionis.

12
89a1347
297) 187135075 (630084 $\frac{117}{297}$
178a1768
89a148
aga1
87a97
580,34) a7566790 (47...
a3a13680
40623-
ago1

187135075 (630084 $\frac{117}{297}$
297
1782
893
297
891
2507
297
2376
1315
297
1188
127

6,000)4320|765
720,$\frac{1275}{}$

8. Ali-

8. Aliquando numerus aliquis dividi postulatur per numerum irrationalem, vel infinitum, sive integer sit, sive mixtus. Atque in hoc casu, sumptis, quot opus est, è primoribus figuris divisoris pro primo divisore, per ipsas divides numerum propositum: deinde pro singulis particularibus divisionibus subsequentibus, divisorem minues amputando versus sinistram totidem ultimas figuras, donec quotum satis amplum inveneris: ut si dividantur 467023 per numerum infinitum 357,0926425 Quotus erit 1307,80 ferè.

```
            17
           308
          1808
         20992
357,0926425) 467023 (1307,80—
         357093
         207127
          18500
            286
```

Pulcherrima hæc est Divisionis contractio, & maximi usus in computationibus Astronomicis. Ut si per 137638 dividendus sit 126223 ductus in sinum totum, hoc est auctum quinque circulis: Appones tantummodò unum circulum: & pro quatuor reliquis minues divisorem. Ut

137638) 1262230 (91727.

9. Divi-

9. Divisio *speciosâ* statuit magnitudinem dividentem sub dividendâ, cum lineolâ interjectâ: tum considerat an magnitudo aliqua utramque communiter multiplicaverit; atque ipsam utrobique expungit. Divisio etiam in iisdem dat +, in diversis −: effertur autem per ad.

Adplica	AE	BAc	BA+A	BA−CA	6Aq	scil. 2×3Aq
ad	A	Aq	A	B−C	3A	3A
Oritur	E	BA	B+1	A	2A	2A

Cap VI. *De Proportione.*

1. Si è quatuor numeris datis, primus ita se habeat ad secundum, ut tertius ad quartum: dicuntur quatuor illi numeri esse proportionales. Numerorum autem ad se invicem habitudo invenitur dividendo antecedentem per consequentem: ut 31 ad 7 ratio est $4\frac{3}{7}$, hoc est quadrupla supertripartiens septimas.

2. Quare si numerus duos numeros multiplicet, facti erunt multiplicatis proportionales. Et si numerus duos numeros dividat, quoti erunt divisis proportionales.

$$\text{Ut } 4\times\begin{cases}7. & 28\\ 9. & 36\end{cases}\&4)\ \begin{matrix}28\\36\end{matrix}\Big(\begin{matrix}7.\\9.\end{matrix}\qquad \text{Item } A\times\begin{cases}B. & BA.\\ C. & CA.\end{cases}\ \&c.$$

$$A)\begin{matrix}BA. & B\\ CA. & C.\end{matrix}$$

3. Quare

3. Quare si quatuor numeri sint proportionales, factus ab extremis æquatur facto à mediis. $7.9::7 \times 4.\ 9 \times 4 :: 28.36$. At $7 \times 9 \times 4 = 9 \times 7 \times 4$.

4. Hinc sequitur aurea (quæ dicitur) regula Proportionis. Si è tribus numeris datis, rectangulum sub secundo & tertio adplicetur ad primum: hoc est, si secundus multiplicet tertium, & primus dividat factum: quotus erit tribus datis quartus proportionalis. Tres numeri dati sunto 7, 9, 28: & pro quarto quæsito statuatur Q. Est igitur $7.9::28.Q$. Quare $7Q = 9 \times 28$. Ideoque $\frac{9 \times 28}{7} = Q$. Item $5.12::8.\ \frac{8 \times 12}{5}$, hoc est $19\frac{1}{5}$.

5. E tribus numeris datis ad quartum Proportionalem inveniendum, duo primi innuunt rationem, & reliquus ingreditur quæstionem, estque in Proportione Directâ primus terminus (sive Divisor) homogeneus ei per quem fit quæstio: At in Proportione Reciprocâ primus terminus (sive Divisor) ipse est per quem fit quæstio.

6. Directa quidem Proportio est, quando terminus is per quem fit quæstio, quô major est, eô quartum majorem requirit: & quo minor eô minorem.

7. Reciproca Proportio est, quando terminus is per quem fit quæstio, quô major est, eô quartum minorem requirit: & quô minor, eô majorem.

8. Proportio continua ∺ est, quando termini omnes medii inter primum & ultimum, rationum sunt tum consequentes, tum antecedentes. Ut 8, 12, 18, 27, sunt ∺. Nam $8.12::12.18::18.27$.

Item

Item $\alpha, \beta, \frac{\beta q}{\alpha}, \frac{\beta c}{\alpha q}, \frac{\beta qq}{\alpha c}, \frac{\beta qc}{\alpha qq}$ &c. sunt $\div\!\!\div$

Quare si in hâc serie ultimus terminus sit ω, & summa omnium terminorum totius progressionis sit Z; erit $Z - \omega$ summa omnium antecedentium; & $Z - \alpha$ summa omnium consequentium.

9. Si quatuor magnitudines sint proportionales, $A . \alpha :: B . \beta$: etiam alternè, & inversè, & compositè & divisim, & conversè & mixtim proportionales erunt,

$$\begin{cases} \text{alternè}, & A . B :: \alpha . \beta. \\ \text{inversè}, & \alpha . A :: \beta . B. \\ \text{compositè}, & A + \alpha . \alpha :: B + \beta . \beta. \\ \quad \text{vel}, & A + B . B :: \alpha + \beta . \beta. \\ \text{divisim}, & A - \alpha . \alpha :: B - \beta . \beta. \\ \quad \text{vel}, & A - B . B :: \alpha - \beta . \beta. \\ \text{conversè}, & A . A \pm \alpha :: B . B \pm \beta. \\ \quad \text{vel}, & A . A \pm B :: \alpha . \alpha \pm \beta. \\ \text{mixtim}, & A + \alpha . A - \alpha :: B + \beta . B - \beta. \\ \quad \text{vel}, & A + B . A - B :: \alpha + \beta . \alpha - \beta. \end{cases}$$

10. Si quotlibet magnitudines sint proportionales, erit ut unus antecedens, ad suum consequentem; sic summa antecedentium, ad summam consequentium. Esto $A . \alpha :: B . \beta :: C . \gamma :: D . \delta$; erit $A . \alpha :: A + B + C + D . \alpha + \beta + \gamma + \delta$.

$$\text{Nam} \begin{cases} A . \alpha :: B . \beta . \text{ \& compositè} \\ A + B . \alpha + \beta :: (B . \beta) \; C . \gamma . \text{ \&} \\ A + B + C . \alpha + \beta + \gamma :: (C . \gamma) \; D . \delta . \text{ \&c.} \end{cases}$$

Item in $\div\!\!\div$ $\alpha . \beta :: Z - \omega . Z - \alpha$. Quare $\alpha Z - \alpha q = \beta Z - \beta \omega$: vel $\beta Z - \alpha Z = \beta \omega - \alpha q$. Hinc obiter liquet in-

ventio summæ omnium terminorum $\div\!\!\div$, sive Progressionis Geometricæ : per hanc Regulam $\left\{\frac{\beta\omega-\alpha q}{\beta-\alpha}\right.=Z$.

11. Si plurium proportionum antecedentes sint æquales; erit ut unus antecedens, ad summam suorum consequentium : Sic alter antecedens ad summam suorum. Esto A. B :: $\alpha.\beta$: & A.C :: $\alpha.\gamma$: & A.D :: $\alpha.\delta$: erit A. B + C + D :: $\alpha.\beta+\gamma+\delta$. Liquet ex priore demonstratione, terminis alternè positis.

12. Si binarum rationum consequentes sint æquales, sunt ut antecedentes. Si verò antecedentes sint æquales, sunt reciprocè ut consequentes.

$$\tfrac{7}{1}.\tfrac{9}{1} :: 7.9. \text{ Et } \tfrac{1}{9}.\tfrac{1}{7} :: 7.9.$$

13. Si bis quatuor magnitudines sint similiter proportionales; ipsarum etiam tum summæ, tum differentiæ proportionales erunt.

14. Si quatuor magnitudines proportionales, per alias quatuor magnitudines proportionales multiplicentur, vel dividantur : etiam Factæ, vel Quotæ, proportionales erunt.

15. Ratio antecedentis ad consequentem componitur, vel ex ratione antecedentis ad tertium, & tertii ad consequentem : vel ex ratione tertii ad consequentem & antecedentis ad tertium. Ut

$$7.9 :: \times \left\{\begin{matrix}7.A.\\ A.9.\end{matrix}\right. \text{ Item } 7.9 :: \times \left\{\begin{matrix}A.9.\\ 7.A.\end{matrix}\right.$$

16. Inventio quarti proportionalis in computationibus Astronomicis.

Si

Si 100000 sit primus terminus, invenitur quartus per 5, Cap:4. Cas.3. Ut 100000. 80902 :: 39875. 32260.

Si 100000 sit secundus terminus, invenitur quartus per 8, Cap:5. Ut 137658. 100000 :: 126225. 91706.

17. Inventio partis proportionalis ex datâ differentiâ duorum numerorum in Canone Prosthaphæreseωn.

In tabulis Prutenicis, Ad epicycli primi Lunæ Anomaliam Gr:62, Prosthaph: ablativa est Gr: 4,1786; & Differentia ibidem Gr: 0,0433: Quanta ejus pars debetur Anamaliæ Gr: 62,5667. Dic 1. 0,0433 :: 0,5667. 0,0245: per cap.4. sect.5. Cas. II. Tum 4,1786 + 0,0245 = 4,2031: quæ est Prosthaph: correcta.

Et contrà si quæratur Anomalia primi Epicycli Lunæ, congruens Prosthaphæresi Gr: 4,2031. Proximè minor in Canone est Gr: 4,1786, respondens Anomaliæ Gr: 62: Estque Differentia ibidem Gr: 0,0433. Est autem 4,2031 - 4,1786 = 0,0245. Dic igitur 0,0433. 0,0245 :: 1. 0,566 +, partes adjungendæ Gr: 62. Eritque Anomalia quæsita Gr: 62,566 +.

18. Conversio partium Sexagesimarum in Decimales & contra Decimalium in Sexagesimales.

Partes Sexagesimæ, puta 45, convertuntur in Decimales, dividendo per 60. Et contra partes Decima-

les, puta 0|75, convertuntur in Sexagesimas, multiplicando per 60.

Ut 6|0. 4|5 : : 1. 0|75.
& 1. 0|75 : : 60. 45. } Nam

Divisio per 60 removet lineam separatricem uno loco versus sinistram : Et Multiplicatio per 60 promovet lineam separatricem uno loco versus dextram. Quæ regula notatu digna est.

Si verò plures sint species Sexagesimales annexæ Integris, puta 127° 32′ 00″ 09‴ 45ⁱᵛ : hoc uteris compendio. Sub Integris 127 statue species Sexagesimales descensu obliquo : Tum facto initio ad infimam, singulas divide continuè per 6 : Et quotus suprascriptos ordini proximo superiori adjunges, donec ad Integros perveneris.

127|533337847222
′32|002708333
″00|1625
6) ‴09|75 ×6
ⁱᵛ45

Et contra, si partes Decimales dentur, puta 127|533337847229 : multiplicabis ipsas continuè per 6; & factos subtus scribes, amputato in singulis ordinibus uno loco versus dextram; ut descensus obliquus compleatur. Intuere diligenter exemplum.

Gradus Æquinoctialis, cum partibus Decimalibus, puta Grad : 236|4276, convertuntur in partes Decimales diei; dividendo per 360, hoc est 6+60.

Et

Et contra, partes, Decimales Diei puta 0,6567433: convertuntur in Gradus, multiplicando per 360. hoc est 60×6. intuere diligenter exemplum.

6) 236,4276
60) 39,4046×6
0,6567433:×60

Gradus Æquinoctialis, cum partibus Decimalibus puta Grad: 236,4276 convertuntur in Horas dividendo per 15, hoc est, 3×5.

3) 236,4276
5) 78,8092×3
15,76184×5

Et contra, Horæ cum partibus Decimalibus, puta 15,76184 convertuntur in Gradus, multiplicando per 15, hoc est, 5×3.

• Horæ cum partibus decimalibus, puta Ho: 15,76184 convertuntur in partes Decimales Diei, dividendo per 24, hoc est, 4×6.

4) 15,76184

Et contrà partes Decimales Diei, puta 0,6567433+, convertuntur in Horas, multiplicando per 24, hoc est, 6×4.

6) 3,94046×4
0,656433:×6

Summa collecta, puta 19 1 3 7 4, convertitur in expansam, dividendo continuè per 60, & contrà summa eadem expansa, 53 09 34, convertitur in collectam multiplicando continuè per 60.

Notandum autem hic eſt, quod ſi ſumma collecta ſit unitatum, ſcil: 191374°; expanſa erit 53'' 09' 34°, hoc eſt 53 Sexagenæ ſecundæ, 9 Sexag: 1æ, & 34 unitates. Si verò ſumma collecta ſit ſexageſimarum ſecundarum, ſcil: 191374''; expanſa erit 53° 09' 34'.

19137'4
60) 318|9|3×60
53|0

19. Illa quidem proportio rationum fuit æqualitas & dicitur Geometrica, eſt autem alia proportio Arithmetica, quæ eſt æqualitas differentiarum: nempe quando in quatuor terminis, eadem eſt differentia tertii & quarti, quæ eſt primi & ſecundi. Ut 7.4:12.9 vel 7.7−3 : 12.12−3. Arithmeticè proportionales ſunt.

20. Quare è quatuor numeris Arithmeticè proportionalibus, ſumma extremorum æquatur ſummæ mediorum 7+12−3=7−3+12.

21. Et ſi è tribus numeris datis ſecundus addatur tertio; & primus tollatur è ſumma: reliquus erit quartus Arithmeticè proportionalis. Ut ſi dentur 7, 4, & 12: erit 12+4−7=9, qui quartus eſt quæſitus.

22. Eſt etiam proportio Arithmetica continua, ſive Progreſſio, quando omnes termini à primo eâdem continuò exurgunt differentia: Ut 4, 7, 10, 13, 16, 19, &c. Differentia communis omnium eſt 3. Nam in hâc ſerie, primus (& quaſi radix) eſt 4: ſecundus conſtat ex primo & differentiâ unâ: Tertius conſtat

ex

ex primo & differentiis duabus: Et generaliter quilibet terminus constat ex primo & ex summâ differentiarum, quarum numerus uno minor est quam numerus terminorum: Exempli gratia, terminus decimus tertius conflabitur ex primo & differentiis duodecim, quarum summa est 36. Est igitur 4+36, hoc est 40, terminus decimus tertius.

23. Si in Progressione Arithmetica, primus terminus addatur ultimo, & summa ducatur in numerum terminorum: factus erit duplicata summa totius Progressionis: Nempe 40 + 4 in 13=572, quæ summæ est terminorum duplicata.

24. Si supra seriem terminorum in Progressione Geometrica, statuatur pro Indicibus, series terminorum qualiumcunque Progressionis Arithmeticæ: quibuslibet quatuor numeris in Arithmetica proportione respondebunt quatuor numeri Geometricè proportionales.

Indices, 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.
Termini, 5. 15. 45. 135. 405. 1215. 3645. 10935

Quia $10+16-6=20$; Erit $\frac{45\times 1215}{5}=10935$.

Atque hinc patet inventio termini cujusvis in Progressione Geometrica.

25. Est etiam tertia Proportio, Musica dicta, Quando in quatuor numeris, est ut Primus ad Quartum: sic differentia primi & secundi, ad differentiam Tertii & Quarti. Ut 5,8,12,30, sunt musicè proportionales: quia 5. 30 :: 8-5. 30-12 :: 3. 18. Item in specie-

bus A, M, N, E; Esto A . E :: M — A . E — N. Quare AE — AN = ME — AE. Terminis hisce ritè ordinatis Regula erit, $\frac{AN}{2A-M} = E$. & $\frac{EM}{2E-N} = A$.

In verbis sic, si rectangulum sub primo & tertio dividatur per excessum primi duplicati supra secundum: quotus erit quartus in Musica proportione. Quare oportet terminos sic dari, ut primus duplicatus excedat secundum.]

CAP. VII.

DE MAXIMA COMMUNI MENSURA: quâ numeri dati reducuntur ad minimos terminos ejusdem rationis.

1 MAxima duorum numerorum communis mensura invenitur perpetua divisione majoris per minorem, & divisoris per reliquum. Nam divisor ille qui primus dividuum suum metitur, absque ullo reliquo, maxima erit utriusque numeri dati communis mensura. Ut numerorum 899 & 744 maxima mensura invenietur 31.

$$
\begin{array}{l}
\quad\ \ 31\ \ 124\ \ 155 \\
31)\ \cancel{124})\cancel{155})\cancel{744})\cancel{899}(\cancel{1}\cancel{4}\cancel{1}\cancel{4} \\
\qquad \cancel{124}\ \ \cancel{124}\ \ \cancel{620}\ \ \cancel{744}
\end{array}
$$

2 Numerorum reductio ad minimos terminos ejusdem rationis fit dividendo utrumque per maximam ipsorum communem mensuram, ut 899 & 744 reducuntur ad 29 & 24, qui minimi sunt termini in eadem ratione, diviso utroque per 31 maximam utriusque mensuram. Sic $\frac{3Aq}{6A}$ reducuntur ad $\frac{A}{2}$ dividendo utrumque terminum per 3A. Et $\frac{4Acc}{6Aqq}$ reducitur ad $\frac{2Aq}{3}$ dividendo per 2Aqq. Item $\frac{BA}{B}$ reducitur ad A, dividendo utrumque per B. Nam quod multiplicatio conficit, divisio dissolvit.

3 Quare si maxima duorum numerorum communis mensura sit 1: dicuntur duo illi numeri primi inter se. Suntque minimi in eadem ratione, ut 29 & 24.

Si numerus primus sit ad utrumque factorem, primus erit ad factum. Hinc proportionis operatio fieri sæpenumero potest facilior, ut in exemplo.

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ \cancel{3} & 2 & & 5 \\ \cancel{12}.\,8 & :: & \cancel{15}. & 10. \end{array}$$

5 Memento autem diligenter, *Quotiescunque fractio aliqua, sive ratio, proponitur, ut ipsam primò ad minimos terminos reducat*, ut $\frac{744}{899}$ fiant $\frac{24}{29}$.

CAP.

CAP. VIII.

DE PARTIBUS: quæ etiam fractiones, sive numeri fracti, dicuntur.

1 VNitas (sive integrum unum quodque) concipi mente potest in quotcunque æquales partes divisibilis: quæ quidem partes denominationem ex numero suo, quem unitas continet, sortiuntur: ut si unitas intelligatur dividi in binas æquales partes, dicuntur secundæ; si in tres, tertiæ: & sic de reliquis.

2. Scribuntur partes duobus terminis cum lineola interjecta: quorum inferior denotat unitatem divisam in totidem æquales partes; & dicitur denominator. Superior verò ostendit quot ex partibus illis significantur; atque ideò dicitur numerator. Ut $\frac{4}{5}$ 4 numerator, 5 denominator $\Big\}$ & significant quatuor quintas partes, sive quatuor partes unius integri divisi quinquifariam.

3 *Quam igitur rationem habet numerator ad denominatorem, eandem habet quantitas significata ad unitatem.* 4.5 : : $\frac{4}{5}$.1. R.S : : $\frac{R}{S}$.1

4. Et quia ratio quævis terminis innumeris similiter sese adinvicem habentibus (quorum quidem maximi dari nequeunt) poterit exprimi: sequitur partes etiam easdem, non iisdem solummodò numeris, sed aliis infinitis, posse designari. Ut quincuncem significant

cant non modo $\frac{5}{12}$, qui minimi ſunt termini in eadem ratione, ſed etiam $\frac{10}{24}$ $\frac{20}{48}$ $\frac{35}{84}$ $\frac{45}{108}$: & quotcunque alii numeri fiunt multiplicando 5 & 12 in alium quemvis numerum, per 2 cap. 6.

5 Quare æqualium partium, ſive fractionum, termini ſunt proportionales, & contra.

6 Item, ſi partium numerator minor ſit denominatore, partes ſunt unitate minores: ſi æqualis, ſignificant unitatem. Et ſi major, partes unitatem excedunt, eâdem ratione, quâ denominator à numeratore ſuperatur. Reducuntur autem ad unitates dividendo numeratorem per denominatorem: ut $\frac{31}{7}$ ſunt $4\frac{3}{7}$ item $\frac{CR+SA}{R}$ eſt $C+\frac{SA}{R}$ Et contra integri, ſive unitates reſolvuntur in partes cujuſque generis multiplicando unitates per denominatorem earundem partium, ut 1 fiet $\frac{3}{3}$, vel $\frac{7}{7}$, &c. & $4\frac{3}{7}$ fient $\frac{28+3}{7}$, hoc eſt $\frac{31}{7}$. item $C+\frac{SA}{R}$ fiet $\frac{CR+SA}{R}$

CAP. IX.

DE ADDITIONE ET SUBDUCTIONE PARTIUM.

1 SI partes propoſitæ diverſarum ſint ſpecierum: Primò reducendæ ſunt ad eandem denominationem

tionem, dividendo denominatores per maximam ipsorum communem mensuram; & multiplicando terminos per alternos quotos. Deinde in numeratoribus partium inventarum ejusdem denominationis additio vel subductio instituenda est. Et summæ denique, vel differentiæ, communis ille denominator subscribendus.

2 Et si integri partibus sint immixti, seorsum tamen sunt numerandi. Exempli gratia:
Ex $6\frac{1}{12}$ tollatur $\frac{13}{16}$ & $2\frac{7}{12}$. Primò addendæ sunt $\frac{13}{16}$ & $2\frac{7}{12}$ eruntque 2 & $\frac{39+28}{48}$ vel $\frac{67}{48}$, nempe $3\frac{19}{48}$: quibus demptis è $6\frac{1}{12}$ restabunt $2\frac{95}{144}$ ut in exemplo

$$\begin{array}{cccc}
 & 67 & & \\
 & 39+28 & 57 \quad 8 & 5\frac{152}{144} \\
 & \cancel{12} \quad \cancel{9} & \cancel{19} \quad 1 & \\
 & \frac{}{}2\frac{}{}\text{ eſt} & 3\frac{}{}\text{è}\,6\frac{}{} & 3\frac{57}{144} \\
4) & \cancel{16} \quad \cancel{12} & 48 \quad \cancel{18} & \\
 & \underbrace{4 \quad 3}_{48} & 6)\ \underbrace{8 \quad 3}_{144} & 2\frac{95}{144}\ \text{R} \\
\end{array}$$

Adde $\frac{A}{B}$ & Z, summa $\frac{A+ZB}{B}$ $\frac{BE+DA}{}$

$\frac{B}{CA} + \frac{D}{CE}$ C) $\underbrace{A \quad E}_{CAE}$

Ex $\frac{A}{B}$ tolle $\frac{B}{C}$, restat $\frac{CA-Bq}{BC}$

CAP. X.

DE MULTIPLICATIONE ET DIVISIONE PARTIUM.

1 Multiplicatio comparat heterologos terminos (hoc est reducit ad minimos) & multiplicat homologos.

2 Divisio comparat homologos terminos, & multiplicat heterologos.

3 Et si integri partibus sint immixti, resolvendi sunt integri in partes.

Exempla Multiplicationis.

$\underset{4}{\overset{1}{\dfrac{\cancel{9}}{\cancel{16}}}}$ in $\underset{3}{\overset{5}{\dfrac{\cancel{20}}{\cancel{27}}}}$ fit $\dfrac{5}{12}$ | $\overset{4}{\dfrac{\cancel{8}}{9}}$ in $\underset{3}{\dfrac{5}{\cancel{6}}}$ fit $\dfrac{20}{27}$ | $\dfrac{5}{1}$ in $3\overset{13}{\dfrac{1}{4}}$ fit $\dfrac{65}{4}$ ($16\frac{1}{4}$

$\dfrac{A}{B}$ in B fit A | $\dfrac{A}{B}$ in Z fi $\dfrac{ZA}{B}$ | $\dfrac{A}{B}$ in $\dfrac{ZA}{C}$ fit $\dfrac{ZAq}{BC}$

Exempla Divisionis.

$\underset{4}{\overset{3}{\dfrac{\cancel{9}}{\cancel{16}}}}\Big)\underset{7}{\overset{5}{\dfrac{\cancel{15}}{\cancel{28}}}}\Big(\dfrac{20}{21}$ | $\underset{3}{\dfrac{8}{\cancel{15}}}\Big)7\underset{1}{\overset{37}{\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{5}}}}\Big(\dfrac{111}{8}\Big(13\frac{7}{8}$ | $\overset{1}{\dfrac{\cancel{3}}{4}}\Big)\overset{3}{\dfrac{\cancel{9}}{1}}\Big(\dfrac{12}{1}$

$\dfrac{D}{1}\Big)\dfrac{Aq}{B}\Big(\dfrac{Aq}{DB}$ | $\dfrac{A}{D}\Big)\dfrac{BC}{1}\Big(\dfrac{BCD}{A}$ | $\dfrac{A}{B}\Big)\dfrac{BC}{1}\Big(\dfrac{BqC}{A}$

$\dfrac{B}{A}\Big)\dfrac{BC}{1}\Big(\dfrac{CA}{1}$ | $\dfrac{Ac}{C}\Big)\dfrac{Bc}{D}\Big(\dfrac{BcC}{DAc}$

4 Quis

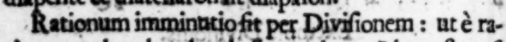
4. Quis numerus est $\frac{2}{7}$ è 21? Multiplica 21 per $\frac{2}{7}$. Nam $1 . \frac{2}{7} :: 21 . 6$. vel $7 . 2 :: 21 . 6$.

5. Cujus numeri 6 continet $\frac{2}{7}$? Divide 6 per $\frac{2}{7}$. Nam $\frac{2}{7} . 1 :: 6 . 21$. vel $2 . 7 :: 6 . 21$.

6. Apud antiquos Musicæ Scriptores, termini multiplicandi in rationum sive continuatione, sive imminutione, connectuntur lineolis curvis, in hunc modum.

7. Rationum continuatio fit per Multiplicationem ipsarum, ac si essent fractiones. Continuentur rationes 3 ad 2, & 4 ad 3: idem est ac si dicatur, multiplicentur $\frac{3}{2}$ in $\frac{4}{3}$, fientque $\frac{12}{6}$, quæ dupla est ratio. Quare ratio sesquialtera continuata cum ratione sesquitertia facit duplum: vel ut loquuntur Musici, ex diapente & diatessaron fit diapason.

Rationum imminutio fit per Divisionem: ut è ratione 3 ad 2 detrahenda sit 4 ad 3: Idem est ac si jubeatur $\frac{3}{2}$ dividi per $\frac{4}{3}$, restabitque $\frac{9}{8}$: nam $\frac{4}{3}$) $\frac{3}{2}$ ($\frac{9}{8}$, ratio sesquioctava: quæ mensura est Toni integri. Unde dicunt Musici quod differentia inter diapente & diatessaron est Tonus. Ut in hâc lineâ sive chordâ divisâ in duodecim partes.



CAP. XI.

Exempla aliquot facillima, quibus quæ hactenus tradita sunt familiaria redduntur: Et via ad Æquationum Analyticam sternitur.

1 SCiendum primò est, quod in sequentibus, tum brevitatis, tum phantasiæ juvandæ gratia passim fere his verborum symbolis utor. A & E significant duos numeros, sive magnitudines; quorum A plerumque major est, E minor. Æ rectangulum sub ipsis. Z est summa. X differentia. Zq. summæ quadratum. Xq differentiæ quadratorum, Ƶ summa quadratorum. Ӿ differentia quadratorum 𝔷 summa cuborum. 𝔵 differentia cuborum. A, M, E, sunt tres continuè proportionales: A, M, N, E, quatuor. Q: C: QQ: QC: &c. præfixæ magnitudinibus inter duo utrinq; puncta inclusis, significant illiusmodi potestates. √ denotat radicem sive latus potestatis simplicis, si non intercedant duo puncta: Si vero potestas duobus utrinque punctis includatur, significat latus ipsius universale: quod etiam aliter per literam b vel r describi solet, ut √b latus est Binomii, & √r latus Residui sive Apotomes. = nota est æqualitatis.

2. Sunt duo numeri sive magnitudines, quorum major est A, minor E: quantum est ipsorum summa? quæ differentia? quod sub ipsis rectangulum? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia?

quæ

quæ summæ & differentiæ ipsorum summa? quæ summæ & differentia ipsorum differentiæ? quod summæ & differentiæ ipsorum rectangulum? quod summæ quadratum? quod differentiæ quadratum? quæ quadratorum summæ & differentiæ summa? quæ quadratorum summæ & differentiæ differentia? quod quadratum rectanguli?

Z est $A+E$. X est $A-E$. $Æ$ est AE.

$\mathcal{Z} = Aq+Eq$. $\mathcal{X} = Aq-Eq$.

$Z+X = 2A$. $Z-X = 2E$. $\tfrac{1}{2}Z+\tfrac{1}{2}X = A$ &

$ZX = Aq-Eq = \mathcal{X}$. $(\tfrac{1}{2}Z-\tfrac{1}{2}X = E$

$Zq = Aq+2AE+Eq$. $Xq = Aq-2AE+Eq$.

$Zq+Xq = 2Aq+2Eq$. $Zq-Xq = 4AE$: &

$Æq = AqEq$. $(\tfrac{1}{4}Zq-\tfrac{1}{4}Xq = AE$:

3 Sunt duo numeri sive magnitudines, quorum summa est Z, & major ex ipsis ponitur A: quisnam est minor? quæ ipsorum differentia? quod sub ipsis rectangulum? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia?

$E = Z-A$. $X = 2A-Z$. $Æ = ZA-Aq$.

$\mathcal{Z} = Zq-2ZA+2Aq$. $\mathcal{X} = 2ZA-Zq$.

Si vero minor ex ipsis ponatur E:

$A = Z-E$. $X = Z-2E$. $Æ = ZE-Eq$.

$\mathcal{Z} = Zq-2ZE+2Eq$. $\mathcal{X} = Zq-2ZE$.

4 Sunt duo numeri sive magnitudines, quorum differentia est X, & major ex ipsis ponitur A: quisnam est minor? quæ ipsorum summa? quod sub ipsis

ipsis rectangulum? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia?

$E = A - X.$ $Z = 2A - X.$ $Æ = Aq - XA.$

$Z = 2Aq - 2XA + Xq.$ $X = 2XA - Xq.$

Si vero minor ex ipsis ponatur E:

$A = E + X.$ $Z = 2E + X.$ $Æ = Eq + XE.$

$Z = 2Eq + 2XE + Xq.$ $X = 2XE + Xq.$

5. Sunt duo numeri sive magnitudines, quorum major ad minorem, rationem habet R ad S; & major ex ipsis ponitur A: quisnam est minor? quæ ipsorum summa? quæ ipsorum differentia? quod sub ipsis rectangulum? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia.

$$E = \frac{SA}{R}. \quad Z = \frac{RA + SA}{R}. \quad X = \frac{RA - SA}{R}$$

$$Æ = \frac{SAq}{R} \quad Z = \frac{RqAq + SqAq}{Rq} \quad X = \frac{RqAq - SqAq}{Rq}$$

Si vero minor ex ipsis ponatur E:

$$A = \frac{RE}{S}. \quad Z = \frac{RE + SE}{S}. \quad X = \frac{RE - SE}{S}$$

$$Æ = \frac{REq}{S} \quad Z = \frac{RqEq + SqEq}{Sq} \quad X = \frac{RqEq - SqEq}{Sq}$$

6. Sunt duo numeri sive magnitudines, quorum rectangulum est Æ; & major ex ipsis ponitur A; quisnam est minor? quæ ipsorum summa? quæ ipsorum differentia? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia?

$$E = \frac{Æ}{A}. \quad Z = \frac{Aq + Æ}{A}. \quad X = \frac{Aq - Æ}{A}.$$

$$Z = \frac{Aqq + Æq}{Aq}. \quad X = \frac{Aqq - Æq}{Aq}$$

Si verò minor ex ipsis ponatur E:

$$A = \frac{Æ}{E}. \quad Z = \frac{Æ + Eq}{E}. \quad X = \frac{Æ - Eq}{E}.$$

$$Z = \frac{Æq + Eqq}{Eq}. \quad X = \frac{Æq - Eqq}{Eq}.$$

7. Atque ex his comparatis multæ æqualitates oriuntur. Exempla sumemus in summa & Differentia.

$$Z = A + E = 2A - X = 2E + X = \frac{Aq + Æ}{A} = \frac{Æ + Eq}{E} \ \&c.$$

$$X = A - E = 2A - Z = Z - 2E = \frac{Aq - Æ}{A} = \frac{Æ - Eq}{E} \ \&c.$$

Hoc modo etiam in reliquis comparationes poterunt institui, quibus eadem magnitudo multas admittet interpretationes atque diversitates.

CAP.

CAP. XII.

DE GENESI, ET ANALYSI POTESTATUM.

1 Quia omnia resolvuntur in easdem partes, ex quibus coagmentantur: primò scire oportet ex quibus partibus quælibet potestas constituitur. Potestates autem fiunt à radice aliquoties in se multiplicatâ. Nam latus in se ductum facit quadratum; Quadratum ductum in latus facit cubum. Cubus ductus in latus suum facit quadrato-quadratum, quæ potestas est quartana $\boxed{4}$: hæc iterum ducta in latus facit quadrato-cubum, scilicet quintanam $\boxed{5}$: Et sic ulteriùs progrediendo fiunt potestates sextana $\boxed{6}$, septimana $\boxed{7}$, octavana $\boxed{8}$, nonana $\boxed{9}$, decimana $\boxed{10}$, & reliquæ, pro numero dimensionum suarum, ex quibus componuntur.

Quare potestatum à radice singulari, quæ unica figura, sive nota, constat, procreatio nihil habet difficultatis.

2 TABELLA PRIOR POTESTATUM A RADICE SINGULARI.

L N	2 q	3 c	4 qq	5 qc	6 cc	7 qqc	8 qcc
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256
3	9	27	81	243	729	2187	6561
4	16	64	256	1024	4096	16384	63536
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616
7	49	343	2401	16087	117649	823543	5764801
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216
9	81	729	6581	59049	531441	4782969	43046721

3 Quæ

3 Quæ verò à radice binarum notarum exurgunt, hunc habent ortus sui modum.

Genesis potestatum à radice binomia.

$$
\begin{array}{l}
\quad A+E \\
\quad A+E \\
\hline
Aq+AE \\
\quad +AE+Eq \\
\hline
Aq+2AE+Eq. \quad \text{Quadratum} \\
\quad A+E \\
\hline
Ac+2AqE+AEq \\
\quad +AqE+2AEq+Ec \\
\hline
Ac+3AqE+3AEq+Ec. \quad \text{Cubus} \\
\quad A+E \\
\hline
Aqq+3AcE+3AqEq+AEc \\
\quad +AcE+3AqEq+3AEc+Eqq \\
\hline
Aqq+4AcE+6AqEq+4AEc+Eqq. \quad \text{Quadrato-quadr:} \\
\quad A+E \quad \&c
\end{array}
$$

4 Atque hoc artificio conficietur tabula potestatum adscendentium in scala à radice binomia: quæ *POSTERIOR* vocetur.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	Aq	Ac	Aqq	Aqc	Acc	Aqqc	Aqcc	Accc	Aqqcc
	2AE	3AqE	4AcE	5AqqE	6AqcE	7AccE	8AqqcE	9AqccE	10AcccE
E	Eq	3AEq	6AqEq	10AcEq	15AqqEq	21AqcEq	28AccEq	36AqqcEq	45Aqc
		Ec	4AEc	10AqEc	20AcEc	35AqqEc	56AqcEc	84AccEc	120Aqqc
			Eqq	5AEqq	15AqEqq	35AcEqq	70AqqEqq	126AqcEqq	210AccE
				Eqc	6AEqc	21AqEqc	56AcEqc	126AqqEqc	252AqcE
					Ecc	7AEcc	28AqEcc	84AcEcc	210AqqE
						Eqqc	8AEqqc	36AqEqqc	120AcEq
							Eqcc	9AEqcc	45AqEq
								Eccc	10AEc
									Eqqcc

5 Quælibet ſpecies intermedia cujuſque ordinis componitur ex duabus ſpeciebus ordinis præcedentis utrinque proximis: nempe A poteſtate ſuperioris ſpeciei, & E poteſtate inferioris. Numerus etiam adfigendus ex utroque numero iiſdem adfixo aggregatur. Quare continuari facile poterit hæc tabula ulterius pro libitu.

6 In hâc tabulâ duæ extremæ poteſtates ſingulorum generum ſunt diagonales: & ſpecies intermediæ ſunt complementa: quibus adfixæ ſunt unciæ, oſtendentes numerum complementorum in conſtitutione cujuſque poteſtatis ſumendorum. Complementa autem omnia, cum E poteſtate, Gnomon non ineptè dici poterit.

7 Ex hâc tabulâ etiam liquet, quod quadratum à radice binarum notarum conſtat ex diagonalibus quadratis utriuſque notæ, & duplice rectangulo ſub ipſis notis. Cubus autem conſtat ex cubis diagonalibus, & triplice ſolido ſub quadrato majoris notæ & notâ minore, & triplice item ſolido ſub majore notâ & quadrato minoris. Quod ſimiliter de reliquis quoque poteſtatibus eſt efferendum.

8 Oſtendit inſuper plena hæc myſteriis pulcherrimis tabella, in numeroſa poteſtate, ſedes tum poteſtatum ſingularium ſive diagonalium, tum cujuſque ſpeciei complementorum. Nam cùm inter bina quadrata unica eſt ſpecies, quadratorum ſedes unicum interponent pro complementis locum. Et cùm inter binos cubos duæ ſunt complementorum ſpecies,

cuborum sedes binos interponent locos complementis suis ordine distribuendos.

Cap. XIII.

His itaque præmissis ad GENESIN potestatum accedamus.

1 PRoponatur Genesis quadrati à latere 57. major igitur nota A est 5, minor E est 7. Scribantur 5 & 7 intermisso unius gradus spacio : & linea sub ipsis ducatur. Sub 5 statuatur quadratum suum 25 : & sub 7 suum 49. tum duplicetur 5, & multiplicetur per 7, fietque duplum rectangulum 70, ponendum loco intermedio. addantur omnia suis quæque locis: summa erit 3249 pro quadrato lateris 57 quæsito.

5	7		
25		Aq	
70		2AE	gnomon
	49	Eq	
32	49		

2 Proponatur iterum Genesis cubi à latere 57. scribantur 5 & 7 intermisso duorum graduum spacio & linea sub ipsis ducatur. sub 5 statuatur cubus suus 125: & sub 7 suus 343. tum quadratum à 5 triplicetur, & multiplicetur per 7, fietque triplum solidum majus 525, ponendum loco priore intermedio.

5	7		
125		Ac	
525		3AqE	gnomon.
735		3AEq	
	343	Ec	
185	193		

dio: item triplicetur 5, & multiplicetur per 49 quadratum à 7, fietque triplum solidum minus 735, ponendum loco intermedio secundo. addantur omnia suis quæque locis: summa erit 185193 pro cubo lateris 57 quæsito.

3 Si latus propositum constet pluribus figuris, ut 57209: Primò potestas duarum primarum figurarum 57 quærenda est. Deinde sumptis 57 pro A, & figura 2 sequente pro E: quæratur potestas ipsius eodem, qui ante ostensus est tabellæ ordine. Quod etiam in reliquis figuris singulatim est faciendum.

5	7	2	0	9		Radix.
25		Aq				
7	0	2 AE	gnomon.			
	49	Eq				
32	49			Aq		
	22	8		2 AE	gnomon.	
		4		Eq		
32	71	84	00		Aq	
	1	02	96	0	2AE	gnomon.
				81	Eq	
32	72	86	96	81		Quadratum.

5	7	2	0	9		Radix.
125		Ac				
52	5	3AqE			gnomon	
7	35	3AEq				
	343	Ec				
185	193			Ac		
1	949	4		3AqE	gnomon	
	6	84		3AEq		
		8		Ec		
187	149	248	000		Ac	
	88	339	680	0	3AqE	gnomon.
		13	899	60	3AEq	
				729	Ec	
187	237	601	580	329		Cubus.

4 Ex his, quæ jam declarata sunt, non difficile erit reliquas etiam omnes superiorum generum potestates progignere: modò in ipsarum genitura, inferiorum omnium ad ipsis adscendentium potestatum genesis instituatur: sicut in cubi genesi jam factum vides.

CAP.

Cap. XIV.

Sequitur ANALYSIS: quæ est eductio radicis ex numerosa potestate data.

1 Analysis, postquam sedes potestatum, pro suo quasque juxta tabulam genere, punctis, posito primo puncto sub loco unitatum, distinxerit: primò ex figuris primi à sinistra puncti potestatem diagonalem comprehensam tollit: latusque ipsius, quod A vocetur in margine scribit. tum numero reliquo, ad proximum usque punctum (qui gnomonem intelligitur continere) per divisorem ex latere A invento legitimè conflatum, diviso, secundum latus E quærit & in margine scribit: per quod deinùm gnomonem perficit: perfectumque ex reliquo illo subtrahit. Et sic integra duorum primorum singularium laterum, in duobus primis punctis contenta, potestate dempta, restabit ad tertium usque punctum gnomon pro tertio latere similiter eruendo.

Analysis

Analysis quadrati

1		
~~723~~	~~02~~	
~~3272~~	~~8696~~	~~81~~ (57209
~~25~~	Aq	punctatio
10	2A	divisor
70	2AE	
49	Eq	
~~749~~		gnomon
11	4 2A	divisor
22	8	2AE
	4	Eq
~~22~~	84	gnomon
1	144	2A divisor
	1 1 4 4	0 2A divisor
1	0 2 9 6	0 2AE
		81 Eq
~~1~~	~~0296~~	~~81~~ Gnomon.

Analysis

```
      2|088
     62|0 4 4 3 5 8
    187|2 3 7 6 0 1 | 580 | 329   (57209
    125|   Ac
      7|5     | 3Aq }
       |15    | 3A  }
      7|65    divisor
    525|5     | 3 AqE }
      7|35    | 3 AEq }
       |343   |    Ec }
     60|193   |  gno-  | mon
       |9747  |        | 3Aq
       |  171 |        | 3A
       |97641 |        divi- | for
      1|9494  |        | 3AqE
       |  684 |        | 3AEq
       |      8        |   Ec
      1|956 | 248 |  gno- | mon
       |98  | 1552       | 3Aq }
       |      1716       | 3A  }
       |98 1 7 2 3 6     | divisor
       |98 1 5 5 2 0 0   3Aq
       |      1 7 1 6 0  3A
       |9|8 1 5 6 9 1 6 0   divisor
       |883 3 9 6 8 0 0     3AqE }
       |    1 3 8 9 9 60    3AEq }
       |               729    Ec }
       |-882|282|2608|229  gnomon.
```

```
 5 | 7 | 2 | 0
25 |
 70
  49
3249
   228
     4
3271|8400
```

Analysis Cubi.

2 Si numerus propositus non sit verus sui generis figuratus, sed peracta Analysi aliquid restet: punctationes circulorum pro suo genere, quot opus erit statuendæ sunt: & continuanda Analysis post lineam separatricem.

3 Ex his etiam quæ declarata sunt, non difficile erit ope tabellæ radices ex superioribus potestatibus omnibus educere.

Cap. XV.

De lateribus surdis.

1 SI quotlibet numeri sint continuè proportionales. Erit ut primus ad ultimum, sic potestas primi æquimultiplicati numero terminorum minus uno, ad potestatem similem secundi, sunto quatuor

$$\begin{array}{c} \div\!\!\div A,M,N,E \\ \text{Quia} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A.\,M::A.\,M \\ M.\,N::A.\,M \\ N.\,E::A.\,M \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Erit per Multiplicationē} \\ A.E::Ac.Mc. \end{array}$$

2 Numeri plani vel solidi similes sunt, quorum latera homologa sunt proportionalia.

3 Numeri plani similes sunt in duplicatâ ratione (hoc est, ut quadrata) homologorum laterum. Sunt igitur numeri plani similes, ut quadratus numerus ad quadratum numerum. Item numeri solidi similes sunt in triplicatâ ratione (hoc est, ut Cubi) homologorum

logorum laterum. Sunt igitur numeri solidi similes, ut numerus Cubicus ad numerum Cubicum.

4 Et generaliter omnes figurati similes plurium dimensionum, sunt in ratione homologorum laterum, æquimultiplicatâ numero dimensionum, ex quibus componuntur. Dimensiones sunto quatuor, nempe ABCD unius, & EFGH alterius, in ratione R ad S.

$$\text{Quia}\left\{\begin{array}{l} A.E::R.S \\ B.F::R.S \\ C.G::R.S \\ D.H::R.S \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Erit per multiplicationem} \\ ABCD.EFGH::Rqq.Sqq.\end{array}$$

5. Si numerus non sit verus sui generis figuratus, latus ejus dicitur surdum. & sic notatur, $\sqrt{q6}$, $\sqrt{c4}$, $\sqrt{qq20}$, $\sqrt{qc13}$: hoc est latus quadrati 6, latus cubi 4, latus quadrato-quadrati 20, latus quadrato-cubi 13. &c.

6 Latera surda commensurabilia sunt, quorum numeri ad minimos terminos reducti fiunt veri sui generis figurati: suntque idcirco ut numerus ad numerum, ut $\sqrt{q12}$ & $\sqrt{q147}$ reducta ad minimos terminos per $\sqrt{q3}$ maximam utriusque communem mensuram, fiunt $\sqrt{q4}$ & $\sqrt{q49}$, hoc est 2 & 7: quare cum $\sqrt{q12}$ & $\sqrt{q147}$ sint ut 2 ad 7, erunt commensurabilia. Sic $\sqrt{c40}$ & $\sqrt{c1715}$ sunt ut 2 ad 7, quoniam divisa per maximam suam communem mensuram $\sqrt{c5}$, fiunt $\sqrt{c8}$ & $\sqrt{c343}$; ideoque commensurabilia.

7 Adduntur autem, atque subtrahuntur, latera surda commensurabilia, si summæ, vel differentiæ, numerorum ipsis similium inventorum homogenea potestas ducatur in communem ipsorum mensuram. Ut $\sqrt{q}147+\sqrt{q}12$ est $\sqrt{q}243$; hoc est latus quadrati à $7+2$ (nempe 81) ductum in $\sqrt{q}3$ maximam ipsorum communem mensuram. Et $\sqrt{q}147-\sqrt{q}12$ est $\sqrt{q}75$; hoc est latus quadrati à $7-2$ (nempe 25) ductum etiam in $\sqrt{q}3$.

Item $\sqrt{c}1715+\sqrt{c}40$ est $\sqrt{c}3645$, hoc est latus cubi $7+2$ (nempe 729) ductum in $\sqrt{c}5$ maximam ipsorum communem mensuram. Et $\sqrt{c}1715-\sqrt{c}40$ est $\sqrt{c}625$, hoc est latus cubi à $7-2$ ductum etiam in $\sqrt{c}5$.

Additionis & subductionis operatio talis est.

$$\sqrt{q}3)\begin{array}{l}\sqrt{q}147\ (\sqrt{q}49.\ 7\\ \sqrt{q}\ 12\ \ (q4.\ 2.\end{array}\qquad \sqrt{c}5)\begin{array}{l}\sqrt{c}1715\ (\sqrt{c}343.\ 7\\ \sqrt{c}\ 40\ \ (\sqrt{c}\ 8.\ 2\end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll}\sqrt{q}243 & \sqrt{q}\,81.\ 9 & \text{summa} & \sqrt{c}3645 & \sqrt{c}729.\ 9\\ \sqrt{q}\ 75 & \sqrt{q}25.\ 5 & \text{diffr.} & \sqrt{c}625 & \sqrt{c}125.\ 5\end{array}$$

$$\sqrt{12}+\sqrt{\tfrac{27}{4}}$$

vel

$$\sqrt{\tfrac{48}{4}}+\sqrt{\tfrac{27}{4}}$$

$$\sqrt{3})\begin{array}{l}\sqrt{48}\ (\sqrt{16}.\ 4\\ \sqrt{27}\ (\sqrt{9}.\ 3\end{array}$$

$$\sqrt{\tfrac{147}{4}} : \sqrt{49}.\ 7$$

$$\sqrt{\tfrac{245}{12}}+\sqrt{\tfrac{5}{12}}$$

$$\sqrt{5})\begin{array}{l}\sqrt{245}\ (\sqrt{49}.7\\ \sqrt{5}\ \ (\sqrt{1}.\ 1\end{array}$$

$$\sqrt{\tfrac{320}{12}} : \sqrt{64}.\ 8$$

$$\sqrt{\tfrac{180}{12}} : \sqrt{36}.\ 6$$

8 Latera verò surda incommensurabilia, atque hete-

heterogenea, adduntur, vel subtrahuntur, signis + vel — ut $\sqrt{q}7 + \sqrt{q}4$. & $\sqrt{c}10 - \sqrt{c}5$.

9 Si numerus figuratus per numerum figuratum homogeneum multiplicetur, factus erit numerus ejusdem generis figuratus, cujus latus æquale est facto à lateribus numerorum multiplicatorum. Et si numerus figuratus per numerum figuratum homogeneum dividatur, quotus erit numerus ejusdem generis figuratus, cujus latus æquale est quoto lateris majoris divisi per latus minoris. Ut factus à numeris cubicis 343 & 27 est 9261, numerus etiam cubicus, cujus latus est 7×3. Item $\sqrt{q}\,\frac{AqBq}{Bq}$ est $\frac{AB}{B}$.

10 Quare laterum surdorum homogeneorum multiplicatio, & divisio, procreat latus etiam surdum homogeneum: ut $\sqrt{q}7$ in $\sqrt{q}3$ est $\sqrt{q}21$. Et $\sqrt{q}7$) $\sqrt{q}21$ ($\sqrt{q}3$: vel $\sqrt{q}\,\frac{21}{7}$ est $\sqrt{q}3$. Item $\sqrt{q}A$ in $\sqrt{q}E$ est $\sqrt{q}AE$. Et $\sqrt{q}A$) $\sqrt{q}AE$ ($\sqrt{q}E$: vel $\sqrt{q}\,\frac{AE}{A}$ est $\sqrt{q}E$.

11 Latera verò heterogenea non multiplicantur, vel dividuntur, nisi prius ad idem genus reducuntur, quod fit dividendo indices utriusque potestatis propositæ per maximam ipsorum communem mensuram: & multiplicando tum Indices per alternos quotos: tum ipsas potestates in species alternis quotis cognomines. Ut si ad multiplicandum vel dividendum, proponantur $\sqrt{qq}10$ & $\sqrt{cc}7$. Primò reducuntur ad $\sqrt{cccc}1000$, & $\sqrt{cccc}49$: cubando 10, & quadrando 7: Tum demùm fiat multiplicatio, vel di-

 visio

visio. Sic etiam $\sqrt{qqA}$, & $\sqrt{ccBq}$ reducuntur ad $\sqrt{ccccAc}$, & $\sqrt{ccccBqq}$: uti planiùs adparebit per praxim, quæ hic adponitur.

$$\sqrt{\boxed{12}}1000\ \sqrt{\boxed{12}}49 \qquad \sqrt{\boxed{12}}Ac\ \sqrt{\boxed{12}}Bqq$$

$$\boxed{2})\ \sqrt{\begin{array}{c}\boxed{4}\\ \boxed{3}\end{array}}10 \quad \sqrt{\begin{array}{c}\boxed{6}\\ \boxed{3}\end{array}}7 \qquad \boxed{2})\ \sqrt{\begin{array}{c}\boxed{4}\\ \boxed{3}\end{array}}A \quad \sqrt{\begin{array}{c}\boxed{6}\\ \boxed{3}\end{array}}Bq$$

Rursus si $\sqrt{c32}$ duplicandum sit, vel multiplicandum per 2: pro 2 sumatur $\sqrt{c8}$: & per ipsum multiplicetur $\sqrt{c32}$; fietque $\sqrt{c256}$, æquivalens bis $\sqrt{c32}$.

Item si dimidiandum sit $\sqrt{c32}$, vel dividendum per 2 : pro 2 sumatur $\sqrt{c8}$: & per ipsum dividatur $\sqrt{c32}$; orieturque $\sqrt{c\frac{32}{8}}$; hoc est $\sqrt{c4}$, æquivalens $\frac{1}{2}\sqrt{c32}$.

Sic etiam $\frac{12}{7}\sqrt{qAq}$, fiet $\sqrt{q\frac{144}{49}Aq}$, hoc est $\frac{12}{7}A$.

12 Si latus potestatis multiplicandum sit secundùm exigentiam suæ speciei : deleatur nota speciei lateralis. ut Q: $\sqrt{q64}$, vel C: $\sqrt{c64}$, est 64.

13. Et si latus potestatis, cujus index est numerus compositus, multiplicandum sit secundùm exigentiam alterutrius speciei componentis : latus alterius speciei numero speciali solùm præfigatur : ut Q: $\sqrt{cc64}$ est $\sqrt{c64}$ & C. $\sqrt{cc64}$ est $\sqrt{q64}$. Nam $\sqrt{cc}$ est $\sqrt{\boxed{2*3}}$.

14 Si magnitudo plurium nominum, ducatur in seipsam

ſeipſam, cum uno ex ſuis ſignis mutato; expungebitur unum nomen. Ut $3+\sqrt{5}+\sqrt{2}$ in $3+\sqrt{5}-\sqrt{2}$, fiet $12+\sqrt{180}$.

Cap. XVI.

De Æquatione. & De quæſtionibus per Æquationem ſolvendis.

1 QUotieſcunque problema aliquod, ſive quæſtio, proponitur: Puta præſtitum eſſe quod poſtulatur: aptáque adhibita ratiocinatione, pro quæſita magnitudine ponatur A, vel alia aliqua vocalis: pro magnitudinibus autem datis conſonantes; quò facilius magnitudines datæ ab incertis dignoſcantur.

2 Deinde magnitudines, tam datæ, quam quæſitæ, ſecundum conditionem quæſtioni convenientem, efformentur atque comparentur, addendo, ſubtrahendo, multiplicando, & dividendo donec tandem aliquid inveniatur magnitudini, de qua quæritur, vel ſuæ, ad quam adſcendet, poteſtati æquale.

3 Et quia in omni ferè æquatione, ubi primò ex involucris quæſtionis effulget, nota cum ignotis confunduntur: termini ipſius ita ſunt ordinandi, ut quæ in data habentur menſura, faciant unam partem, & quæ ignota quæruntur, alteram. Quod quo artificio fiat, regulæ quinque ſequentes commonſtrabunt.

 4 Primò,

4 Primò si magnitudo quæsita, vel aliquis ejus gradus, sit in fractione: fiat omnium magnitudinum ad unam denominationem reductio: ut omisso communi illo denominatore, in solis numeratoribus æquatio censeatur. Ut $A - C = \frac{Aq+Bq}{D} + B + C$: Erit $DA - DC = Aq + Bq + DB + DC$.

5 Secundò, si, quæ in data habentur mensura, immisceantur cum quæsitis: *fiat transpositio magnitudinum ex una parte in aliam sub contrario signo.* Ut $DA - DC = Aq + Bq + DB + DC$: Et transpositis DC & Aq, erit $DA - Aq = 2DC + DB + Bq$. Quæ etiam regula in omni transpositione servanda est.

6 Tertiò, si species altissima quæsitæ magnitudinis ducatur in magnitudinem aliquam datam: fiat omnium magnitudinum æquationis ad illam communis adplicatio. Ut $BAq + BqA = Zc$: erit $Aq + BA = \frac{Zc}{B}$

7 Quartò, si contingat omnes datas magnitudines duci in gradum aliquem magnitudinis quæsitæ: fiat omnium, per adplicationem ad minimam speciem, secundum ordinem tabellæ communis depressio. Ut $Aqq + BAc = ZqAq$, erit $Aq + BA = Zq$, expuncto in singulis Aq. Atque hoc modo æquatio qualibet proposita poterit deprimi, sive reduci ad minores species; Si terminorum omnium fiat ad eundem gradum communis adplicatio. Ut $Ac + XAq = Nc$, divisa per A, fiet $Aq + XA = \frac{Nc}{A}$: at divisa per Aq, fiet

A

$A+X=\frac{Nc}{Aq}$ Quæ quidem operatio in numerosâ adfectarum æquationum resolutione usus erit non contemnendi: quia latus quæsitum faciliùs æstimatur in minoribus potestatibus, quam in majoribus.

8 Quintò, si magnitudo aliqua sit latus surdum: æquatio in ipsis potestatibus est instituenda. Ut $\sqrt{q}BA+B=C$: vel per transpositionem $\sqrt{q}BA=C-B$. Ideóque ipsorum quadrata, $BA=Cq-2CB+Bq$: vel $A=\frac{Cq-2CB+Bq}{B}$

Item $\sqrt{u}: BA+CA:-D=B$. Vel $\sqrt{u}: BA+CA: =D+B$. Ideoque & ipsorum quadrata $BA+CA=Bq+2BD+Dq$: vel $A=\frac{Bq+2BD+Dq}{B+C}$

Denique $\sqrt{q}\frac{A}{3}=\sqrt{c}2A$: vel per 11 c 15, $\sqrt{qc}\frac{Ac}{27}=\sqrt{qc}4Aq$. quare $Ac=108Aq$. Et $A=108$.

9 Æquationum, in quibus sunt tres species æqualiter in ordine scalæ adscendentes, constitutio liquebit ex sect: 2, 3, 4, capitis 11: Nam quia

$Z-A=E$: ducatur utraque pars in A.
$Z-E=A$: ducatur utraque pars in E.
$A-X=E$: ducatur utraque pars in A.
$E+X=A$: ducatur utraque pars in E.

Atque hac multiplicatione hujusmodi orientu[r] æquationes.

ZA - Aq = Æ	Aq - XA = Æ
ZAq - Aqq = Æq	Aqq - XAq = Æq
ZAc - Acc = Æc	Acc - XAc = Æc
&c	&c
ZE - Eq = Æ	Eq + XE = Æ
ZEq - Eqq = Æq	Eqq + XEq = Æq
ZEc - Ecc = Æc	Ecc + XEc = Æc
&c	&c

Quotiescunque igitur proponitur Æquatio constans ex tribus speciebus æqualiter in ordine scal[æ] adscendentibus: Cogitabis magnitudinem absolutam datam esse rectangulum sub duabus magnitudinibus quæsitis, sive latera sint, sive quadrata, sive Cubi &c: qualis scil: est potestas mediæ speciei. In media autem specie, si altissima species sit negata, coëfficientem esse summam magnitudinum quæsitarum; Et d[e] utraque exponi. At si altissima species sit adfirmat[a] coëfficientem esse magnitudinum quæsitarum differentiam; ipsam autem speciem exponi de majore, negatam; vel de minore, adfirmatam.

Tum datis binarum magnitudinum summa & rectangulo, datur earundem differentia: vel dat[a] differentia & rectangulo, datur summa. Nam pe[r] a Cap: XI.

$$\left.\begin{array}{l} Q{:}\tfrac{1}{2}Z{:}-Æ = Q{:}\tfrac{1}{2}X \\ Q{:}\tfrac{1}{2}X{:}+Æ = Q{:}\tfrac{1}{2}Z \end{array}\right\}\text{quare}\left\{\begin{array}{l} \sqrt{u}{:}\tfrac{1}{4}Zq-Æ{:} = \tfrac{1}{2}X. \\ \sqrt{u}{:}\tfrac{1}{4}Xq+Æ{:} = \tfrac{1}{2}Z. \end{array}\right.$$

Denique datis binarum magnitudinum $\tfrac{1}{2}Z$ & $\tfrac{1}{2}X$, dantur ipsæ magnitudines; hisce duabus Regulis.

$$\text{I Reg-}\tfrac{1}{2}Z \pm \sqrt{u}{:}\ \tfrac{1}{4}Zq-Æ{:}(\tfrac{1}{2}X) = \frac{A.}{E.}$$

$$\text{II Reg}\cdot\sqrt{u}{:}\ \tfrac{1}{4}Xq+Æ{:}(\tfrac{1}{2}Z) \pm \tfrac{1}{2}X = \frac{A.}{E.}$$

10. ***GENESIS*** sex Binomiorum ex lateribus suis surdis. Regula est, $Z+2Æ=Zq$.
In Apotomis vero, $Z-2Æ=Xq$.

Exempl: I. Quadretur Binomium $4+\sqrt{11}$. Hîc Z est $16+11$, hoc est 27. Et $Æ$ est $\sqrt{16}\times\sqrt{11}$, hoc est $\sqrt{176}$: cujus duplum est $\sqrt{704}$. Quadratum igitur erit $27+\sqrt{704}$. Quod dicitur Binomium I.

Exempl: II. Quadretur Bimediale prius, $\sqrt{qq}\,12 + \sqrt{qq}\,\tfrac{27}{4}$. Hîc Z est $\sqrt{12}+\sqrt{\tfrac{27}{4}}$, vel $\sqrt{\tfrac{48}{4}}+\sqrt{\tfrac{27}{4}}$; hoc est $\sqrt{\tfrac{147}{4}}$, per 7, Cap: XV. Et $Æ$ est $\sqrt{qq}\,12\times\sqrt{qq}\,\tfrac{27}{4}$, vel $\sqrt{qq}\,3\times\sqrt{qq}\,27$; hoc est, $\sqrt{qq}\,81$, scil: 3: cujus duplum est 6. Quadratum igitur erit $\sqrt{\tfrac{147}{4}}+6$: Quod dicitur Binomium II.

Exempl : III. Quadretur Bimediale posterius $\sqrt{qq}\,\tfrac{80}{3}+\sqrt{qq}\,15$. Hîc Z est $\sqrt{\tfrac{80}{3}}+\sqrt{15}$, vel $\sqrt{\tfrac{80}{3}}+\sqrt{\tfrac{45}{3}}$; hoc est $\sqrt{\tfrac{245}{3}}$, per 7, Cap.XV. Et $Æ$ est $\sqrt{qq}\,\tfrac{80}{3}\times\sqrt{qq}\,15$, vel $\sqrt{qq}\,80\times\sqrt{qq}\,5$; hoc est, $\sqrt{qq}\,400$, scil: $\sqrt{20}$: cujus duplum est $\sqrt{80}$. Quadratum igitur erit $\sqrt{\tfrac{245}{3}}+\sqrt{80}$. Quod dicitur Binomium III.

In tribus reliquis, quæ constant ex radicibus Bino-

mii & Residui connexis, ut √b:A+E: pl √r:A−E: perspicuum est Z esse 2A: & Æ esse √: Aq−Eq. quare

Exempl: IV. Quadretur Major, √b: $\frac{7}{2}$ + √ $\frac{29}{4}$: pl √r: $\frac{7}{2}$ − √$\frac{29}{4}$. Hîc Z est $\frac{7}{2}$ + $\frac{7}{2}$, hoc est, 7. & Æ est √u: $\frac{49}{4}$ − $\frac{29}{4}$: hoc est, √$\frac{20}{4}$, scil: √5: cujus duplum est √20. Quadratum igitur erit 7 + √20. Quod dicitur Binomium IV.

Exempl: V. Quadretur Potens rationale cum mediali, √b: √5+1: pl √r: √5−1. Hîc Z est √5+√5, hoc est, √20. Et Æ est √: 5−1: hoc est, √4, scil: 2: cujus duplum est 4. Quadratum igitur erit √20+4. Quod dicitur Binomium V.

Exempl: VI. Quadretur Potens duo medialia, √b: √5+√3: pl √r: √5−√3. Hîc Z est √5+√5, hoc est, √20. Et Æ est √: 5−3: hoc est, √2: cujus duplum est √8. Quadratum igitur erit, √20+√8. Quod dicitur Binomium VI.

12. Analysis. In Binomio igitur quadratico, majus nomen est Z: & minus nomen 2Æ. At in 2 Cap. XI, ordinatum est, $\frac{1}{4}$ Zq − Æ ═ $\frac{1}{4}$Xq: scil: $\frac{1}{4}$Q: A+E: − Æ ═ $\frac{1}{4}$Q: A−E. Quare si pro A & E sumantur ipsarum quadrata Aq & Eq, erit $\frac{1}{4}$Q: Aq+Eq: − AqEq ═ $\frac{1}{4}$ Q: Aq−Eq: hoc est, $\frac{1}{4}$Zq − Æq ═ $\frac{1}{4}$Xq, ex quo Theoremate pro Analysi Binomii deducitur hæc Regula.

$\frac{1}{2}$Z ± √q: $\frac{1}{4}$Zq − Æq: ($\frac{1}{2}$X) ═ $\begin{matrix}\text{Aq.}\\ \text{Eq.}\end{matrix}$

Exempl: I. Quæratur latus Binomii I, 27 + √704: nempe Z + 2Æ. Quare $\frac{1}{2}$ Z est $\frac{27}{2}$ & Æ est √$\frac{704}{4}$: & $\frac{1}{4}$ Zq − Æq est $\frac{729}{4}$ − $\frac{704}{4}$; hoc est, $\frac{25}{4}$: cujus latus $\frac{5}{2}$ est $\frac{1}{2}$X. At

per

per Reg: $\frac{27}{2} \pm \frac{5}{2} = \left.\begin{array}{l} 16.\ \ 4 \\ 11.\ \sqrt{11} \end{array}\right\}$ Latus igitur quæsitum est $4+\sqrt{11}$. Et dicitur Binomium.

Exempl. II. Quæratur latus Binomii II, $\sqrt{\frac{147}{4}}+6$: nempe $Z+2Æ$. Quare $\frac{1}{2}Z$ est $\sqrt{\frac{147}{16}}$: Et $Æ$ est 3. & $\frac{1}{4}Zq-Æq$ est $\frac{147}{16}-(9)\frac{144}{16}$; hoc est $\frac{3}{16}$: cujus latus $\sqrt{\frac{3}{16}}$ est $\frac{1}{2}X$. At per Reg: $\sqrt{\frac{147}{16}} \pm \sqrt{\frac{3}{16}} = \left.\begin{array}{l} \sqrt{12}.\ \sqrt{qq}\,12. \\ \sqrt{\frac{27}{4}}.\ \sqrt{qq}\,\frac{27}{4}. \end{array}\right\}$ Latus igitur quæsitum est $\sqrt{qq}\,12+\sqrt{qq}\,\frac{27}{4}$. Et dicitur Bimediale prius.

Exempl: III. Quæratur latus Binomii III, $\sqrt{\frac{245}{3}}+\sqrt{80}$: nempe $Z+2Æ$. Quare $\frac{1}{2}Z$ est $\sqrt{\frac{245}{12}}$: & $Æ$ est $\sqrt{20}$. & $\frac{1}{4}Zq-Æq$ est $\frac{245}{12}-(20)\frac{240}{12}$; hoc est $\frac{5}{12}$: cujus latus $\sqrt{\frac{5}{12}}$ est $\frac{1}{2}X$. At per Regul: $\sqrt{\frac{245}{12}} \pm \sqrt{\frac{5}{12}} = \left.\begin{array}{l} \sqrt{\frac{80}{3}}.\ \sqrt{qq}\,\frac{80}{3} \\ \sqrt{15}.\ \sqrt{qq}\,15 \end{array}\right\}$ Latus igitur quæsitum est $\sqrt{qq}\,\frac{80}{3}+\sqrt{qq}\,15$. Et dicitur Bimediale posterius.

Exempl: IV. Quæratur latus Binomii IV, $7+\sqrt{20}$; nempe $Z+2Æ$, Quare $\frac{1}{2}Z$ est $\frac{7}{2}$: & $Æ$ est $\sqrt{5}$: & $\frac{1}{4}Zq-Æq$ est $\frac{49}{4}-(5)\frac{20}{4}$; hoc est, $\frac{29}{4}$: cujus latus $\sqrt{\frac{29}{4}}$ est $\frac{1}{2}X$. At per Reg: $\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{29}{4}} = \left.\begin{array}{l} \frac{7}{2}+\sqrt{\frac{29}{4}}\ \sqrt{b}:\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{29}{4}} \\ \frac{7}{2}-\sqrt{\frac{29}{4}}\ \sqrt{r}:\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{29}{4}} \end{array}\right\}$ Latus igitur quæsitū est $\sqrt{b}:\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{29}{4}}$ pl $\sqrt{r}:\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{29}{4}}$: & dicitur Major.

Exempl: V. Quæratur latus Binomii V, $\sqrt{20}+4$; nempe $Z+2Æ$. Quare $\frac{1}{2}Z$ est $\sqrt{5}$: & $Æ$ est 2: & $\frac{1}{4}Zq-Æq$ est $5-4$; hoc est 1, cujus latus 1 est $\frac{1}{2}X$. At per Reg: $\sqrt{5} \pm 1 = \left.\begin{array}{l} \sqrt{5}+1.\ \sqrt{b}:\sqrt{5}+1 \\ \sqrt{5}-1.\ \sqrt{r}:\sqrt{5}-1 \end{array}\right\}$ Latus igitur

tur quæsitum est $\sqrt{b}: \sqrt{5} + 1 : pl \; \sqrt{r}: \sqrt{5} - 1$. Et dicitur Potens rationale cum mediali.

Exempl: VI. Quæratur latus Binomii VI, $\sqrt{20} + \sqrt{8}$: nempe $Z + 2Æ$. Quare $\frac{1}{2}Z$ est $\sqrt{5}$: & $Æ$ est $\sqrt{2}$: Et $\frac{1}{4}Zq - Æq$ est $5-2$; hoc est 3: cujus latus $\sqrt{3}$ est $\frac{1}{2}X$. At per

$$\text{Regul: } \sqrt{5} \pm \sqrt{3} = \left.\begin{matrix} \sqrt{5}+\sqrt{3}.\; \sqrt{b}: \sqrt{5}+\sqrt{3}. \\ \sqrt{5}-\sqrt{3}.\; \sqrt{r}: \sqrt{5}-\sqrt{3}. \end{matrix}\right\} \text{Latus}$$

igitur quæsitum est $\sqrt{b}: \sqrt{5}+\sqrt{3} : pl \; \sqrt{r}: \sqrt{5}-\sqrt{3}$. Et dicitur Potens duo medialia.

12 Atque hîc obiter trianguli rectanguli plani Genesis se offert. Quia $Zq = Xq + 4AE$. nempe $Hq = Bq + Cq$, per 47 è 1: Propositis binis quibuscunque lineis sive numeris A & E, trianguli rectanguli latera erunt, $A+E$, $A-E$, $\sqrt{4AE}$: vel etiam (mutatis A & E in Aq & Eq) $Aq+Eq$. $Aq-Eq$, $2AE$. Ut si proponantur duo numeri 2 & 1: latera erunt 3, 1, $\sqrt{8}$: nempe $2+1$, $2-1$, $\sqrt{4 \times 2 \times 1}$. vel etiam 5, 3, 4: nempe $4+1$, $4-1$, 2×1 bis.

13 Datis binis triangulis, rectangulis, H, B, C: & h, b, c: tertium ex ipsis fabricare: idque dupliciter.

$$\left.\begin{matrix} 1^{o}. \text{ Quia } Bq = Hq - Cq \\ \text{Et } bq = hq - cq \end{matrix}\right\} \text{Multiplicentur invicem;}$$

Eritque $Bqbq = Hqhq + Cqcq \; mi \; Hqcq + Cqhq$.

At $Hqhq + Cqcq + 2HChc = Q: Hh + Cc$:

Et $Hqcq + Cqhq + 2HChc = Q. Hc + Ch$:

Subducatur unum quadratum ex altero: & erit,

$Bqbq = Q: Hh + Cc : mi \; Q: Hc + Ch$:

Et sic inventum est ex his triangulum tertium,

Bb.

$Bb.\ Hh+Cc.\ Hc+Ch.$ Hæc Regula sit I.

Enunciatur autem verbis sic. Pro trianguli novi base, sumatur rectangulum sub basibus. Pro hypotenusa, rectangulum sub hypotenusis, auctum rectangulo sub cathetis. Pro catheto, rectangulum sub hypotenusa primi & catheto secundi, auctum rectangulo sub catheto primi & hypotenusa secundi.

II° Quia $\left.\begin{array}{l} Hq = Bq + Cq \\ \text{Et } hq = bq + cq \end{array}\right\}$ Multiplicentur invicem

Eritque $Hqhq = Bqbq + Cqcq$ pl $Bqcq + Cqbq$.

At $Bqbq + Cqcq - 2BCBc = Q{:}Bb - Cc{:}$

Et $Bqcq + Cqbq + 2BCbc = Q{:}Bc + Cb{:}$

Addantur hæc duo quadrata: & erit

$Hqhq = Q{:}Bb - Cc{:}$pl $Q{:}Bc + Cb.$

Et sic inventum est ex his triangulum tertium,

$Hh.\ Bb - Cc.\ Bc + Cb.$ Hæc Regula sit II.

Enuntiatur autem verbis sic. Pro trianguli novi hypotenusa, sumatur rectangulum sub hypotenusis. Pro base, rectangulum sub basibus minutum rectangulo sub cathetis. Pro catheto, rectangulum sub base primi, & catheto secundi, auctum rectangulo sub catheto primi & base secundi.

14. Si trianguli rectanguli latera continuè multiplicentur juxta binas regulas modò inventas: Prima multiplicatio angulum basi oppositum duplicabit: Secunda triplicabit: tertia quadruplicabit: & sic ulterius.

Exempl:

Exempl: Reg: Ia. Bb. Hh+Cc.Hc+Ch.

B. H. C: anguli simpli.
B. H. C

Bq . Hq+Cq . 2HC . anguli dupli.
B . H . C

Bc . Hc+HCq . 2HqC
2HCq . HqC+Cc.

Bc . Hc+3HCq . 3HqC+Cc. tripli.
B . H . C

Bqq . Hqq+3HqCq . 3HcC+HCc
Cqq+3HqCq HcC+3HCc

Bqq . Hqq+6HqCq+Cqq . 4HcC+4HCc.
B . H . C quadrupli.
&c

Exempl: Reg: IIa. Hh. Bb−Cc. Bc+Cb.

H . B . C : anguli simpli.
H . B . C

Hq . Bq−Cq . 2BC : anguli dupli.
H . B . C

Hc . Bc−BCq . 2BqC
−2BCq BqC−Cc

Hc . Bc−3BCq . 3BqC−Cc : tripli.
H . B . C

Hqq . Bqq−3BqCq . 3BcC−BCc
Cqq−3BqCq BcC−3BCc

Hqq . Bqq−6BqCq+Cqq . 4BcC−4BCc.
H : B : C quadrupli.
&c

CAP.

Cap. XVII.

Alia tabulæ posterioris in Cap: 12. inspectio, quoad Æquationes.

1 A Binomia radice A + E, potestatum species omnes sunt adfirmatæ. A Residuo verò potestatum species omnes sunt alternatim negatæ, ut Q: A − E: est Aq − 2AE + Eq. Et C: A − E: est Ac − 3AqE + 3AEq − Ec. Et QQ: A − E: est Aqq − 4AcE + 6AqEq − 4AEc + Eqq. &c Adeò ut si potestatis cujusvis species alternatim sumptæ, in duas summas aggregentur: harum summarum connexio cum signo radicis, erit radicis ipsius potestas. Atque hæc est Binomiorum, ac Residuorum, Quadraticorum, Cubicorum, aliorumque constitutio.

2. Quare nominum Binomii, vel Residui cujusque differentia, est homogenea potestas differentiæ nominum radicis. scil: Ac + 3AEq mi 3AqE + Ec, vel Ac + 3AEq − 3AqE − Ec, est C: A − E.

3. Et Quadratorum è nominibus Binomii vel Residui cujusque differentia, est homogenea potestas differentiæ quadratorum è nominibus radicis. scil: Q: Ac + 3AEq: mi Q: 3AqE + Ec: est C: Aq − Eq.

Nam per exempl: Reg: I, in 14, Cap: XVI, si cogitetur A hypotenusa trianguli rectanguli; & E cathetus; & Aq − Eq quadratum basis; hoc Theorema aliter symbolis explicabitur sic: Q: Hc + 3HCq: mi Q: 3HqC + Cc: = C: Bq: = Q: Bc: ergo

4 At

4 At si species in nominibus aggregatæ, ipsæ etiam alternatim adfirmentur, & negentur: Quadratorum è nominibus summa, est homogenea potestas summæ quadratorum è nominibus radicis. Scil: Q: Ac-3AEq: pl Q: 3AqE-Ec: est C: Aq+Eq.

Nam per exempl: Reg: II, in 14, Cap: XVI, si cogitetur A basis trianguli rectanguli; & E cathetus; & Aq+Eq quadratum hypotenusæ; hoc Theorema aliter symbolis explicabitur sic: Q: Bc-3BCq: pl Q: 3BqC-Cc: = C: Hq: = Q: Hc. Ergo,

Pulcherrima sunt hæc circa angulares sectiones mysteria.

5 Omnes cujusque ordinis intermediæ species, sunt etiam potestates mediorum inter A & E proportionalium. scil. inter Ac & Ec, sunt duæ mediæ proportionales, AqE & AEq: qui etiam cubi sunt ex M & N. Quare A, √cAqE, √cAEq, E, sunt continue proportionales: nempe A, M, N, E. Nam AqE = AMN = Mc: & AEq = MNE = Nc. Atque hinc patet inventio quotlibet mediorum proportionalium inter A & E: ut si velis quinque medios proportionales, potestates erunt |6| sive cc, quarum Index unitate excedit numerum quæsitorum mediorum: Eruntque A, √cc AqcE, √ccAqqEq, √cc Ac Ec, √cc Aq Eqq, √cc AEqc, E, ∺

6 Omnis media species in unoquoque genere, fit ex duabus nominum radicis potestatibus, quarum Indices simul, æquales sunt Indici ejusdem generis: media

diæ autem ipſius ſpeciei ab extremis ſuis diſtantiæ, æquales erunt Indicibus alternantium facientium: & facientibus ſuis in communi angulo reſpondent. Scil: AqEc generis quadrato-cubici; fit ex Aq in Ec, quibus in communi angulo reſpondent. Eſtque ab Aqc tertia: & ab Eqc ſecunda.

Conſect. Atque hinc facile erit radicis Binomiæ datæ poteſtatem quamlibet (inventis omnibus mediis inter poteſtates nominum extremas) conſtruere. Ut in exemplo, ſi radicis Binomiæ A + √Æ quæratur Quadrato-Cubus: erit Aqc + 10 ÆAc + 5 ÆqA plus 5 √ÆAqcc + 10√Æc Aqq + √Æqc: Quod Binomium eſt Quadrato-Cubic.

Aqc
Aqq 5√ÆAqcc
Ac
Aq 10 ÆAc
A
10√Æ:Aqq
√Æ
Æ, 5ÆqA
√Æc
Æq √Æqc

7. Si ſpecies aliqua multiplicetur in Æ, producta magnitudo erit media ſpecies collateralis, in ordine alternè ſequente, atque eadem numero à ſuis extremis. Ut Ac ∗ Æ, eſt AqqE, quæ prima eſt ab Aqc, & quarta ab Eqc. Sic AcE ∗ Æ, eſt Aqq Eq, quæ ab Acc ſecunda eſt, & ab Ecc quarta. Et ſimiliter de reliquis.

8 Si ſpecies aliqua multiplicetur per A − E vel X, producta magnitudo erit differentia inter duas ſpecies ordinis ſequentis utrinque proximas. Ut AcX = Aqq − AcE. AqEX = AcE − AqEq. AEqX = AqEq − AEc. EcX = AEc − Eqq. Quare

Si

Si omnes cujusvis ordinis species multiplicentur per X, producetur differentia duarum potestatum extremarum ordinis proximi superioris. Ut ex Ac+AqE+AEq+Ec, ductis in X, fiet Aqq-Eqq.

9 In ordinibus Indicum imparium (l, c, qc, &c) summa duarum extremarum potestatum; at in ordinibus Indicum parium (q, qq, cc, &c) differentia earundem; fit ex A+E ducta in singulas species ordinis minoris præcedentis, alternatim adfirmatas & negatas. Ut Ac+Ec, fit ex Aq−AE+Eq, ductis in A+E. Item Aqq-Eqq, fit ex Ac-AqE+AEq-Ec, ductis in A+E.

10 Si eadem magnitudo multiplicetur in duas magnitudines contrarias: magnitudines ex ipsis factæ erunt etiam contrariæ. Ut Aq−2AE+Eq ductæ in A-E, fient Ac−3AqE+3AEq−Ec. At verò eædem ductæ in −A+E, fient −Ac+3AqE−3AEq+Ec.

11 Unciæ sive numeri speciebus præfixi, sunt figuræ numerariæ. Nam omnes sub A & E, sunt radices. Omnes sub Aq & Eq, sunt triangulares. Omnes sub Ac & Ec, sunt pyramidales. Omnes sub Aqq & Eqq, sunt triangulo-triangulares. Omnes sub Aqc & Eqc, sunt triangulo-pyramidales. Omnes sub Acc & Ecc, sunt pyramidi-pyramidales, &c.

12 Si

12. Si radix tribus constet nominibus, A, E, I, Quadratum $\left\{ \begin{array}{ll} Aq, & 2AE, \\ Eq, & 2EI, \\ Iq, & 2AI, \end{array} \right.$ Cubus $\left\{ \begin{array}{ll} Ac, & Ec, \quad Ic, \\ 3AqE, & 3AEq, \\ 3AqI, & 3AIq, \\ 3EqI, & 3EIq, \\ & 6AEI. \end{array} \right.$

Et nota quòd si in aliqua specie, numerus laterum negatorum sit impar; species illa erit negata. Ut Q: $A+E-I := Aq+2AE+Eq-2EI+Iq-2AI$. Et C: $A+E-I := Ac+3AqE+3AEq+Ec-3EqI+3EIq-Ic-3AqI+3AIq-6AEI$.

Cap. XVIII.

Penus Analytica.

1 EX primis ac facillimis æquationibus, quæ nihil aliud sunt, quàm vel terminorum expositiones, vel simplices effectiones (quales sunt illæ capitis XI, $\frac{1}{2}Z-E=\frac{1}{2}X$: & $\frac{1}{2}X+E=\frac{1}{2}Z$: & reliquæ cujusmodi) innumeræ aliæ deducuntur, per Additionem, Subductionem, multiplicationem, Divisionem, Transpositionem, atque Interpretationem: sumendo id quod alteri inventum est æquale, loco ejus cui æquatur. Quæ quidem Analytica supellex est, non minùs pretiosa, quàm copiosa. Quarum ego præcipuas aliquot, & maximè necessarias adscribam: plures Analytices studiosus pro suo exercitio excogitabit. Et ubicunque

five in Arithmetica, five in Geometria, five in alia aliqua arte, incideret in magnitudinem aliquam, cui altera æqualis esse intelligitur; æqualitatem illam quibuscunque poterit modis atque comparationibus, torquebit, discutiet, variabit, ut novum inde artis instrumentum inveniat: quod postea in penu servabit: & ubicunque poterit in usum proferet, ad artis subsidium atque augmentum.

2|. $Q:1:=9Q:\frac{1}{3}$. &c.	$C:1:=27\,C:\frac{1}{3}$: &c
$Q:1:=\frac{1}{9}Q:3$. &c	$C:1:=\frac{1}{27}\,C:3$: &c
$Q:1:=\frac{9}{4}Q:\frac{2}{3}$. &c	$C:1:=\frac{27}{8}\,C:\frac{2}{3}$: &c
$\frac{2}{3}Q:1:=\frac{2}{3}\times\frac{9}{4}\,Q:\frac{2}{3}$: &c	$\frac{2}{3}C:1:=\frac{2}{3}\times\frac{27}{8}C$: &c
$\frac{2}{3}Q:4:=\frac{2\times16}{3}Q:1$.&c	$\frac{2}{3}C:4:=\frac{2\times64}{3}C:1$:&c

3 Si linea bisecetur, & secùs; rectangulum sub segmentis inæqualibus, æquatur differentiæ quadratorum bisegmenti atque intersegmenti: hoc est semisummæ atque semidifferentiæ segmentorum. 5 e 2. $AE = Q:\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E$: mi $Q:\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E$: hoc est, $AE=\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Xq$.

4 Si linea bisecta augeatur; rectangulum sub tota aucta & augmento, æquatur differentiæ quadratorum bisegmenti aucti, atque bisegmenti. 6 c 2. $A+E$ in E $= Q:\frac{1}{2}A+E$: mi $Q:\frac{1}{2}A$. Et $A+E$ in $A = Q:\frac{1}{2}E+A$: mi $Q:\frac{1}{2}E$.

Datis igitur summa trium $\div\!\!\div$ $(Aq+AE+Eq)$ cum alterutro extremorum, dantur duo reliqui. Nam

$\sqrt{u}: Aq+Æ+Eq-\frac{3}{4}Aq$: mi $\frac{1}{2}A=E$.

$\sqrt{u}: Aq+Æ+Eq-\frac{3}{4}Eq$: mi $\frac{1}{2}E=A$.

5 Si

5 Si linea secetur utcunque; summa quadratorum totius, & unius segmenti, æquatur aggregato quadrati alterius segmenti, & duplicis rectanguli sub tota & priore segmento, 7 e 2. $Zq+Aq=2ZA+Eq$. Et $Zq+Eq=2ZE+Aq$. Quare $2ZA+Eq-Aq=Zq=2ZE+Aq-Eq$.

6 Si linea utcunque secta, augeatur alterutro segmento; Quadruplex rectangulum sub secta, & segmento augente, æquatur differentiæ quadratorum totius auctæ, & alterius segmenti. 8 e 2.

$Q{:}Z+E{:}-Aq=4ZE$. Et $Q{:}Z+A{:}-Eq=4ZA$.

7 Si linea bisecetur, & secus; summa quadratorum segmentorum inæqualium, æquatur duplicatæ summæ quadratorum bisegmenti, & intersegmenti. 9 e 2. $Aq+Eq=2Q{:}\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E{:}+2Q{:}\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E$.

8 Si linea bisecta augeatur; summa quadratorum totius auctæ & augmenti, æquatur duplicatæ summæ quadratorum bisegmenti aucti, & bisegmenti. 10 e 3.

$Q{:}A+E{:}+Eq=2Q{:}\frac{1}{2}A+E{:}+2Q{:}\frac{1}{2}A$.

$Q{:}A+E{:}+Aq=2Q{:}\frac{1}{2}E+A{:}+2Q{:}\frac{1}{2}E$.

9 $Aq=ZA-AE=XA+AE=\frac{1}{2}ZA+\frac{1}{2}XA=Q{:}Z-E{:}=Q{:}E+X{:}=Z-Eq=Eq+X$.

Et $Eq=ZE-AE=AE-XE=\frac{1}{2}ZE-\frac{1}{2}XE=Q{:}Z-A{:}=Q{:}A-X{:}=Z-Aq=Aq-X$.

10 $Æ=\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Xq=ZA-Aq=ZE-Eq=Aq-XA=Eq+XE=\frac{1}{2}Zq-\frac{1}{2}Z=\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}Xq=\frac{1}{2}ZA-\frac{1}{2}XA=\frac{1}{2}ZE+\frac{1}{2}XE$.

11. Z = Aq+Eq = Zq - 2AE = 2AE+Xq = ZE+XA = ZA-XE = 2Q:½Z:+2Q:½Z-E: = Q:A-2N:+Q:2M-E: = ½Zq+½Xq = 2Q:½Z:+2Q:½X: Consectarium ex his duabus ultimis æquationibus : Si magnitudo constet ex quadratis binarum magnitudinum : ejus etiam duplum constabit ex duobus quadratis, summæ scil: & Differentiæ. Et dimidium ejus constabit ex duobus quadratis, semisummæ scil : & Semidifferentiæ.

Et X = Aq-Eq = ZX = 2XA-Xq = 2XE+Xq = ZA-ZE = XA+XE = Zq-2ZE = ZA+XE-2Æ = XA+2Æ-ZE = Q:A+2N: mi Q:2M+E.

12. Q:½A+½E: = Q:½A-½E:+Æ.

Et Q:½A-½E: = Q:½A+½E:-Æ.

13. 2A+2E in A = 2Aq+2AE = Zq+X.

Et 2A-2E in A = 2Aq-2AE = X+Xq.

Et 2A+2E in E = 2AE+2Eq = Zq-X.

Et 2A-2E in E = 2AE-2Eq = X-Xq.

14. Xq = ZqXq = Z+2Æ in Z-2Æ = Zq-4AqEq.

15. ZÆ = AqE+AEq. Et XÆ = AqE-AEq.

Et ZÆ = AcE+AEc. Et XÆ = AcE-AEc.

Quare Z+3ZÆ = Zc. Et X-3XÆ = Xc.

Et ZZ = Z+ZÆ = Ac+AqE+AEq+Ec.

Et ZX = X-XÆ = Ac-AqE+AEq-Ec.

Et XZ = X+XÆ = Ac+AqE-AEq-Ec.

Et XX = Z-ZÆ = Ac-AqE-AEq+Ec.

Hinc ZZ+XX = 2Z. Et XZ+ZX = 2X.

Et ZZ-XX = 2ZÆ. Et XZ-ZX = 2XÆ.

16 Si

16. Si in circulo sit $7.22 :: \delta.\pi :: 113.355$: erit $\delta.\pi :: 2R.P$: &

$\delta.\pi :: Rq$.	Circul.	Et $\pi.\delta :: \frac{1}{4}Pq$.	Circul.
$\delta.\pi :: 2Rc$.	Cylind.	Et $\pi q.\delta q :: \frac{1}{4}Pc$.	Cylind.
$\delta.\pi :: \frac{4}{3}Rc$.	Sphær.	Et $\pi q.\delta q :: \frac{1}{6}Pc$.	Sphær.
$\delta.\pi :: \frac{2}{3}Rc$.	Con.	Et $\pi q.\delta q :: \frac{1}{12}Pc$.	Con.

17. Ad hæc oportet futuram Analyſtam Geometrica iſta, tum theoremata, tum problemata non ignorare.

Theor: 1. Triangula ſunt æqualia : Si in utroque, vel tria latera; vel duo latera cum angulo comprehenſo; vel duo latera cum angulo eidem lateri oppoſito; vel duo anguli cum latere interjacente; vel duo anguli cum latere eidem ſubtenſo; æquentur. 4, 8, 26, e 1.

Theor: 2. Triangula plana ſunt ſimilia : Si vel ſint æquiangula; vel lateribus omnibus proportionalia; vel habeant unum angulum æqualem, & alterum angulum crurum proportionalium, & angulum tertium homogeneum. 4, 5, 6. 7, e 6.

Theor: 3. In omni triangulo, majus latus majorem angulum ſubtendit; & minus minorem; & æquale æqualem. 18, 19 e 1.

Theor: 4. Duæ rectæ lineæ ſunt parallelæ : Si recta ipſas ſecans æquales fecerit, vel angulos alternos; vel externum & internum oppoſitum; vel duos internos ex eâdem parte duobus rectis. Et contra. 27, 28, 29, 30, e 1. Nam lineæ rectæ parallelæ ſunt inſtar unius lineæ latæ.

Theor: 5. Trianguli tres anguli ſimul, æquantur duobus rectis : Et externus angulus duobus internis oppoſitis. 32 e 1.

Theor: 6. Si rectam in circulo inſcriptam, recta è centro biſecet: ad angulos rectos ipſam ſecat. 3 e 3.

Theor: 7. Perpendicularis ſuper finem diametri, circulum tangit. 16,18,19,e 3.

Theor: 8. Angulus ad centrum duplus eſt anguli ad peripheriam. 20 e 3.

Theor: 9. In eodem, vel æqualibus circulis, anguli ſuper equalibus peripheriis, ſunt æquales. 21 e 3.

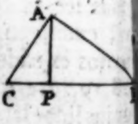
Theor: 10. Angulus in ſemicirculo eſt rectus. 31 e 3.

Theor: 11. Si è puncto in peripheria circuli ducantur binæ rectæ lineæ, una circulum tangens, altera ſecans: anguli inter ipſas comprehenſi menſura, æqualis erit ſemiperipheriæ abſciſſæ. pro: 32 e 3.

Theor: 12. Triangula, ſive parallelogramma, æquialta, vel inter eaſdem parallelas, ſunt ut baſes. 35,36, 37,38, e 1. & 1 e 6.

Theor: 13. Recta biſecans angulum trianguli, ſecat baſem ratione crurum 3 e 6.

Theor: 14. Triangulum rectangulum quodvis notetur literis A B C: ſic ut A ſit angulus rectus : & B A Baſis : & C A Cathetus : B C Hypotenuſa.



Theor: 15. In triangulo rectangulo plano, perpendicularis ex angulo

gulo

gulo recto in Hypotenusam, dividit triangulum in duo triangula, tum toti, tum sibi ipsis similia. 8 e 6.

BC. BA. CA ::	BA. BP. AP ::	CA. AP. CP.
Hypotenusæ	Bases	Catheti ;

Unde sequitur.

1° Perpendicularem esse mediam proportionalem inter segmenta Hypotenusæ: Ideoque Quadratum perpendicularis æquale esse rectangulo sub segmentis. Scil: ∺ BP, AP, CP. Et APq = BP × CP.

2° Basem esse mediam proportionalem inter Hypotenusam, & segmentum Hypotenusæ Basi conterminum. Scil: ∺ BC, BA, BP.

3° Cathetum esse mediam proportionalem inter Hypotenusam, & segmentum Hypotenusæ Catheto conterminum. Scil: ∺ BC, CA, CP.

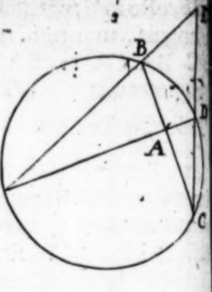
4° Basis & Catheti quadrata, esse ut segmenta Hypotenusæ contermina. BP. CP :: BAq. CAq.

5° Quadratum Hypotenusæ æquari quadratis Basis & Catheti simul. BCq = BAq + CAq.

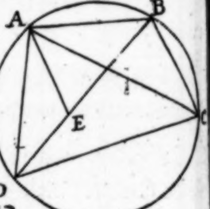
Theor: 16. Si in circulo duæ rectæ inscriptæ sese mutuò intersecent intra circulum (in puncto A) rectangulum sub segmentis unius, æquale est rectangulo sub segmentis alterius. 35 e 3.

 Si

Si verò sese extra circulum intersecent (in puncto E) Rectangula sub segmentis utriusque à puncto ad convexum & concavum circuli, sunt æqualia. 36 & 37 e3. Dico primò AB×AC=AD×AF. Nam tri: BAF, DAC sim. Dico secundò EB×EF=ED×EC. Nam tri: BEC, DEF sim.

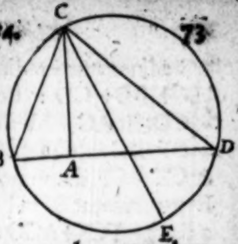


Theo: 17. Quadrilateri in circulo inscripti anguli interiores oppositi simul æquantur duobus rectis. 22 e 3. Et si ducantur duo diagonii, rectangulum sub diagoniis, æquale erit duobus rectangulis sub lateribus oppositis, Dico AC×BD =AB×CD+AD×BC. Nam tri: ACB, ADE sim. & ADC, AEB sim.



Quare $\left\{\begin{array}{l}\text{AC. CB :: AD.DE}\\ \text{AC.CD :: AB.BE}\end{array}\right\}$ ergo,

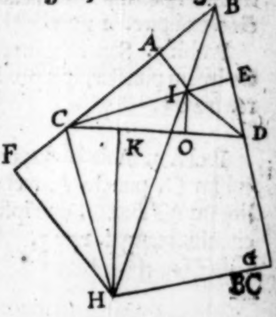
Theor: 18. Si ex angulo quovìs trianguli circulo inscripti, demittatur perpendicularis in latus oppositum:



tum : Erit ut perpendicularis illa, ad unum crus ejusdem anguli : sic crus alterum, ad diametrum circuli. Dico CA. CB::CD.CE. Nam tri : ACB, DCE sim.

Theor: 19. Triangula unum angulum æqualem habentia rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur. 23 e 6.

Theor: 20. Si semisumma trium laterum trianguli plani, & tres differentiæ trium laterum ab illa semisumma, continuè inter se multiplicentur : Vel aliter, si trianguli quovis latere sumpto pro base, & reliquis duobus pro cruribus ; Rectangulum sub semisumma & semidifferentia summæ crurum & basis, ducatur in rectangulum sub semisumma & semidifferentia basis & differentiæ crurum : Facti latus quadratum æquale erit areæ trianguli, esto triangulum BCD, cujus crura sint BC & BD, & basis CD. Bisecentur tres anguli rectis BI, CI, DI, concurrentibus in I: unde in latera ad angulos rectos ducantur IA, IE, IO. Sunt igitur intra triangulum BCD, tria paria triangulorum æqualium. Quare si cruri



BC adjungatur in directum CF=DE; erit BF= $\frac{1}{2}$BC+$\frac{1}{2}$BD+$\frac{1}{2}$CD: Et BA=BF-CD=$\frac{1}{2}$BC+$\frac{1}{2}$BD -$\frac{1}{2}$CD: Et AC=BF-BD=$\frac{1}{2}$CD+$\frac{1}{2}$BC-$\frac{1}{2}$BD: Et CF =BF-BC=$\frac{1}{2}$CD-$\frac{1}{2}$BC+$\frac{1}{2}$BD. Mensuratis BG=BF. & CK=CF: ducantur perpendiculares FH,GH,KH: Et protrahatur BI in H. Quia ang: FCK+FHK= 2 Rect=FCK+ACO: Et ang: ACO+AIO=2Rect: Erunt quadrangula FCKH, AIOC sim. Et tri: CFH, IAC sim. Sunt etiam tri: BAI, BFH sim. His expositis, Dico Quadratum areæ trianguli, nempe BFq· IAq=BF·BA·AC·CF.

Nam IA.BA::FH.BF }
Et IA·AC::CF.FH } propter tri: sim.

Quare per multipl: IAq·BF=BA·AC·CF.

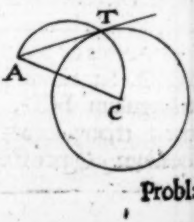
Ducatur utraque pars in BF, eritque &c.

Probl: 1. A dato puncto, vel ad datam distantiam, datæ rectæ lineæ parallelam ducere. 31 e 1.

Probl: 2. Data recta linea, à dato in ea puncto, rectam lineam perpendicularem, sive ad angulos rectos, excitare. 11 e 1.

Probl: 3. Super datam rectam lineam, à dato extra ipsam puncto, perpendicularem rectam demittere. 12 e 1.

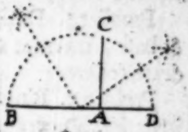
Probl. 4. A dato extra circulum C, puncto A, rectam lineam AT ducere, quæ ipsum circulum tangat. 17 e 3.



Probl:

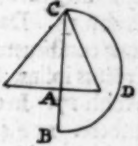
Probl: 5. Tribus rectis lineis datis, quartam proportionalem adinvenire. 12 e 6.

Probl: 6. Datis duabus rectis lineis AB, AD, mediam continuè proportionalem AC, adinvenire. 13 e 6.



Probl: 7. Datis duabus rectis lineis AB, AC, vel AD, AC, tertiam continuè proportionalem AD, vel AB, adinvenire. 11 e 6.

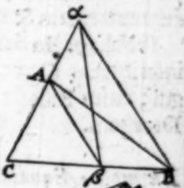
Probl: 8. Dato triangulo, cujus altitudo est AC, & semibasis AB, æquale quadratum ADq, constituere.



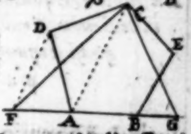
Probl: 9. Dato rectangulo aliud rectangulum æquale, ad datum latus, statuere. 14 e 6.

Probl: 10. Triangulo dato aliud triangulum æquale, ad datam altitudinem constituere.

Ex punctis altitudinum A & α, in angulos oppositos lineæ Aβ & αB, ductæ, sint parallelæ.



Probl: 11. Dato polygono æquale triangulum constituere.



Probl: 12. Datis tribus punctis, non in directum positis, ducere circumferentiam. 25 e 3.

Probl: 13.

Probl: 13. Datis trianguli rectanguli base & Catheto, invenire hypotenusam; vel quadratum quadrato addere.

Probl: 14. Datis trianguli rectanguli hypotenusa & base, invenire cathetum: vel quadratum ex quadrato tollere.

Probl: 15. Binarum figurarum similium rationem invenire. Quæratur tertia proportionalis.

Probl: 16. Datæ figuræ similem figuram, in data ratione constituere. Quæratur media proportionalis inter latus ipsius, & latus simile.

Probl: 17. In dato circulo hexagonum ordinatum inscribere. 15 e 4.

Probl: 18. In dato circulo Decagonum ordinatum inscribere. Secetur semidiameter circuli secundum extremam & mediam rationem, per 11 e 2.

Probl: 19. In dato circulo Pentagonum ordinatum inscribere. Quæratur Hypotenusa trianguli rectanguli, cujus Basis sit latus Hexagoni, & Cathetus latus Decagoni.

Cap. XIX.

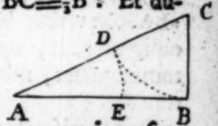
Exempla Æquationis Analyticæ, pro Theorematibus inveniendis, Problematibusque solvendis. ad quem quasi scopum præcepta hactenus tradita præcipuè collineantur.

Probl: I. Inventio 11 e 2. Nempe, Data recta linea B secetur sic ut rectangulum sub tota B, & minore segmento, æquetur quadrato majoris segmenti.

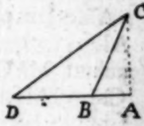
Po-

Ponatur majus ſegmentum A : minus erit $B-A$. ducatur $B-A$ in B: fietque $Bq-BA=Aq$: vel $Aq+BA=Bq$. Quare $\sqrt{u}$: $Bq+\frac{1}{4}Bq$: $-\frac{1}{2}B=A$, per 9 cap. 16. Quod Theorema verbis enunciatur ſic : Si quadrato lineæ datæ, addatur quadrati ipſius quadrans : & è latere quadrato ſummæ, tollatur ſemis lineæ datæ : reliquum erit ſegmentum majus.

Geometricè autem conſtruetur, ſic, Fiat $AB=B$: eique ad angulos rectos ſtatuatur $BC=\frac{1}{2}B$: Et ducatur Hypotenuſa AC : erit $AC=\sqrt{u}$: $Bq+\frac{1}{4}Bq$. Abſcindatur $CD=BC$: Eritque reſiduum $AD=\sqrt{u}$: $Bq+\frac{1}{4}Bq$: $-\frac{1}{2}B$. Denique menſuretur $AE=AD$, pro majore ſegmento.



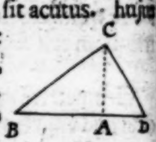
Probl: II. Inventio 12 e 2. Nempe comparatio Baſis obtuſi anguli, cum lateribus. Eſto triangulum BCD : cujus angulus interior ad B, ſit obtuſus : hujus Baſis eſt DC: & latera BD, BC. Hîc $BCq-BAq=CAq=DCq$ ($-DAq$, per 4 e 2) $-BDq-2BD \times BA-BAq$. Quare $BCq+BDq=DCq-2BD \times BA$.



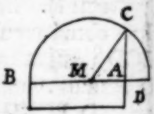
Quod theorema verbis enuntiatur, ſic : In amblygoniis triangulis, quadratum lateris ſubtendentis obtuſum angulum, excedit ſummam quadratorum laterum eundem comprehendentium, duplice rectangulo ſub

sub uno laterum circa obtusum angulum, & segmento ipsius inter obtusum angulum & perpendiculum.

Probl: III. Inventio 13 e 2. Nempe comparatio Basis acuti anguli, cum lateribus. Esto triangulum BCD: cujus angulus interior ad B, sit acutus. hujus Basis est DC: & latera BC, BD. Hic BCq−BAq=CAq=DCq (−DAq, per 7 e 2) −BDq+2BD*BA−BAq. Quare BCq+BDq=DCq+2BD*BA. In verbis, sic, In triangulis obliquangulis, quadratum lateris subtendentis acutum angulum, minus est summa quadratorum laterum &c.



Probl: IV. Inventio 14 e 2: Nempe quadrati æqualis rectangulo AB*AD. Esto AB+AD=2BM. Quare AB+AD secatur æqualiter in M, & inæqualiter in A. Erit igitur per 5 e 2, AB*AD=BMq−AMq. Jam ponatur ACq=AB*AD: fiatque triangulum rectangulum MAC cujus hypotenusa CM=BM semisummæ laterum; & basis AM semidifferentiæ laterum: Cathetus erit AC latus quadrati quæsiti, per 48 e 1.



Inventio area trianguli plani.

Probl: V. Attulit ad me amicus quidam meus, vir doctus, Theorema de areâ trianguli plani; atque ut id examinarem, & demonstratione munirem, postulavit. Erat

Erat autem Theorema, prout memini (nam multi jam elapsi sunt anni) hâc ferè formâ, licet non in iisdem literis.

In triangulo plano cujus latera sunt A,E,B; $\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{8}BqEq-\frac{1}{16}Eqq\\ \frac{1}{8}EqAq-\frac{1}{16}Aqq\\ \frac{1}{8}AqBq-\frac{1}{16}Bqq\end{array}\right\}$ æquantur quadrato areæ trianguli.

Postquam aliquamdiu mecum cogitassem, occurrit mihi 17,c18, Theor:20, quod commodissimum huic nodo solvendo duxi. Nam si trianguli duo crura sint A, E; & basis B: inde liquebit, quod $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E+\frac{1}{2}B$ in $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E-\frac{1}{2}B$, in $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E$, in $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E$, æquatur quadrato areæ trianguli. Factâ igitur harum quatuor magnitudinum continuâ multiplicatione; prodibit $\frac{1}{8}AqEq+\frac{1}{8}AqBq+\frac{1}{8}EqBq-\frac{1}{16}Aqq-\frac{1}{16}Eqq-\frac{1}{16}Bqq$: Quod est ipsum Theorema propositum.

Atque hinc non solum postulato satisfeci; sed etiam quatuor alia Theoremata effectu faciliora exhibui. Nam quia $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E+\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}Z+\frac{1}{2}B$: Et $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E-\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}B$. Et quia $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}X$: Et $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E=\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}X$: Erit $\frac{1}{2}Z+\frac{1}{2}B$ in $\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}B=\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Bq$. Et $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}X$ in $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}X=\frac{1}{4}Bq-\frac{1}{4}Xq$. Liquet igitur primò, $\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Bq$ in $\frac{1}{4}Bq-\frac{1}{4}Xq=Q$: areæ trianguli. In verbis sic, Si quadrans differentiæ quadratorum summæ crurum & basis ducatur in quadrantem differentiæ quadratorum basis & differentiæ crurum; producta magnitudo æqualis erit quadrato Areæ trianguli.

Deinde

Deinde quia $\frac{1}{4}Zq - \frac{1}{4}Bq$ in $\frac{1}{4}Bq - \frac{1}{4}Xq = \frac{1}{16}ZqBq + \frac{1}{16}BqXq - \frac{1}{16}Bqq - \frac{1}{16}ZqXq$: Liquet ſecundò, $Zq + Xq - Bq$ in $\frac{1}{16}Bq$ mi $\frac{1}{16}ZqXq =$ Q: Areæ trianguli.

Item quia $Zq + Xq = 2Z$, per 11, c 18 : Et $ZqXq = Xq$, per 14, c 18 : Liquet tertiò $2Z - Bq$ in $\frac{1}{16}Bq$ mi Q: $\frac{1}{4}X =$ Q: Areæ trianguli.

Deniq; ex his comparatis, erit quartò $\left\{ \frac{2ZBq - Bqq - Xq}{16} \right. =$ Q: Areæ tri.

Hæc poſteriora Theoremata verbis facilè enunciantur.

Probl: VI. Problematum circa Progreſſionem Arithmeticam ſolutio in viginti Propoſitionibus. Symbola verborum hæc ſint : α primus terminus minimus. ω ultimus maximus. T numerus terminorum. X differentia communis. Z ſumma omnium terminorum. Eſt igitur T--1 numerus differentiarum: ideoque $TX - X = \omega - \alpha$, ſumma differentiarum.

Datis tribus ex quinque illis α, ω, T, X, Z, invenire duo reliqua per viginti propoſitiones ſequentes (tot enim ſunt varietates) hoc ordine.

Datis	Quæruntur	Per Propoſiti:	
α, ω, T	Z & X	1 & 2	
α, ω, X	T & Z	3 & 4	
α, ω, Z	T & X	5 & 6	
α, T, X	ω & Z	7 & 8	
α, T, Z	ω & X	9 & 10	

Datis

Datis	Quæruntur	Per Propositio:
α, X, Z	ω & T	11 & 12
ω, T, X	α & Z	13 & 14
ω, T, Z	α & X	15 & 16
ω, X, Z	α & T	17 & 18
T, X, Z	α & ω	19 & 20

Prop: I. $T\omega + T\alpha = 2Z$.

II. $\frac{\omega - \alpha}{T-1} = X$.

III. $\frac{\omega - \alpha}{X} + 1 = T$. per 2.

IIII. $\frac{\omega q - \alpha q}{X}$ [illegible]

V. $\frac{2Z}{\omega + \alpha} = T$.

VI. $\frac{\omega q - \alpha q}{2Z - \omega - \alpha} = X$. per 4.

VII. $TX - X + \alpha = \omega$. per 2.

VIII. $TX - X + 2\alpha$ in $X = 2Z$. per 1 & 7.

IX. $\frac{2Z - T\alpha}{T} = \omega$. per 1.

X. $\frac{2Z - 2\alpha}{Tq - T} = X$. per 8.

XI. $\left.\begin{array}{l}\sqrt{u}{:}\ \frac{1}{4}Xq+2ZX+\alpha q\\ -X{:}\ \text{minus}\ \frac{1}{2}X\end{array}\right\}=\alpha.$ per 4.

XII. Si $B=2\alpha-X$, erit
$\sqrt{u}{:}\ \frac{Bq}{4Xq}-\frac{2Z}{X}{:}\ \text{mi}\ \frac{B}{2X}=T.$ per 8.

XIII. $\omega+X-TX=\alpha.$ per 7.

XIV. $2\omega+X-TX\ \text{in}\ T=2Z.$ per 1 & 13.

XV. $\frac{2Z}{T}-\omega=\alpha.$ per 9.

XVI. $\frac{2T\omega-2Z}{Tq-T}=X.$ per 14.

XVII. $\left.\begin{array}{l}\sqrt{u}{:}\ \frac{1}{4}Xq+\omega q+X\omega\\ -2ZX{:}\ \text{plus}\ \frac{1}{2}X\end{array}\right\}=\alpha.$ per 4.

XVIII. $\left.\begin{array}{l}\frac{2\omega+X}{2X}\ \text{minus}\ \sqrt{u}{:}\\ \frac{4\omega q+4X\omega+Xq-2Z4X}{4Xq}\end{array}\right\}=T.$ per 14.

XIX. $\frac{2Z}{2T}-\frac{TX}{2}+\frac{X}{2}=\alpha.$ per 10.

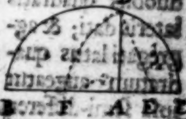
XX. $\frac{2Z}{T}+\frac{TX}{2}-\frac{X}{2}=\omega.$ per 16.

Probl; VII. Euclides 11 e 2, docuit secare lineam datam, sic, ut rectangulum sub tota & minore segmento, æquetur quadrato majoris segmenti: quæ sectio est penè divina. Proponatur jam illud problema generaliter; ut data linea AB ita secetur, ut rectangulum sub tota AB, & minore segmento, ad quadratum majoris segmenti, rationem quamcunque possibilem datam habeat: puta R ad S.

Primo fiat R. S :: AB. AC: qui quartus sit proportionalis. tum pro majore segmento ponatur A: minus segmentum erit AB−A: quod ductum in AB, dabit rectangulum ABq−AB×A. Erit igitur AB.AC :: ABq −AB×A. Aq. Ideoque per 3 cap:6, ABq×AC−AB ×AC×A=AB×Aq. Et divisis omnibus per AB, erit AB×AC−AC×A=Aq: vel Aq+AC×A=AB×AC. Et per 9 cap:16, invenitur √u: ¼ ACq+AB×AC:−½AC =A.

Hoc theorema inventum, verbis sic enuntiatur: Si ad quadratum semissis quarti proportionalis, adjungatur rectangulum sub linea recta data, & quarto illo proportionali; Et ex latere quadrato summæ tollatur semis quarti proportionalis: Reliquum erit segmentum majus.

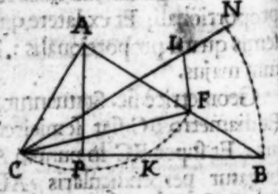
Geometricè sic. Statuantur AB & AC in directum: Et diametro BC fiat semicirculus: Et super BC in puncto A, erigatur perpendicularis AD, secans semicirculum in D. tum bisecta AC in E, mensuretur



G F

BF=ED. Dico lineam AB sic secari in puncto F ut sit R.S :: AB*BF. AFq. Nam AC*AF+AC*BF =AC*AB=ADq=CF*AF, per 6 c 2, =AC*AF+AFq. Quare AC*BF=AFq. Atqui AB.AC :: AB*BF.AC*BF. Ergo,

Prob. VIII. Dato latere alterutro trianguli rectanguli (in quo perpendicularis ex angulo recto secat hypotenusam) una cum BK differentia segmentorum hypotenusæ, invenire tum hypotenusam, tum triangulum ipsum. Primò detur latus minus CA. Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC; in quo è vertice in hypotenusam demittatur perpendicularis AP, secans hypotenusam in BP & CP segmenta. Est autem CP$=\frac{BC-BK}{2}$ Quia est BC. CA::CA. $\frac{BC+BK}{2}$ erit $\frac{BCq-BC*BK}{2}$=CAq: vel BCq—BK*BC=2CAq. quare per 9 c 16, $\sqrt{q:\frac{1}{4}BKq+2CAq}:+\frac{1}{2}BK=BC$. Enunciatur autem hoc theorema verbis sic: Si quadratum semi-differentiæ segmentorum hypotenusæ addatur duobus quadratis lateris dati; & aggregati latus quadratum augeatur ipsa semi-differentia: tota aucta æqualis erit hypotenusæ.



Geometricè sic. Ducatur CF: ipsique perpendicularis $FL = \frac{BK}{2}$ & extendatur CL ad N, ut $LN = \frac{1}{2}BK$. Erit $CN = BC$. quare inscribatur circulo $CK = CN - BK$: & producatur, &c. Nam $CFq = 2CAq$. & $CLq = 2CAq + \frac{1}{4}BKq$. Ergo,

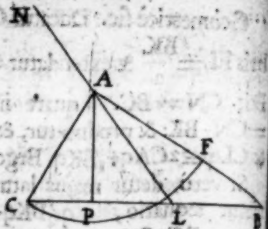
Si verò detur majus latus BA: hujusmodi invenietur æquatio, $\sqrt{q}: \frac{1}{4}BKq + 2BAq: - \frac{1}{2}BK = BC$. sumpta $\frac{BC+BK}{2}$ pro PB.

Et modus geometricus priori non absimilis.

Prob. IX. Datis differentia laterum trianguli rectanguli BF, & perpendiculari AP ab angulo recto in hypotenusam: invenire tum hypotenusam, tum triangulum ipsum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam per 7 e 2. $2BA \times AF + BFq = BAq + AFq$, Ideoque $BFq = (ABq + AFq$, hoc est) $BCq - (BA \times 2CA$. hoc est) $BC \times 2AP$, quia $BC. CA :: BA. AP$. Erit $BCq - 2AP \times BC = BFq$. quare per 9 c 16. $\sqrt{q}: APq + BFq: + AP = BC$.

Enunciatur autem hoc theorema verbis sic: Si quadrato perpendicularis addatur quadratum differentiæ laterum; & aggregati latus quadratum augeatur ipsa perpendiculari: tota aucta æqulis erit hypotenusæ.

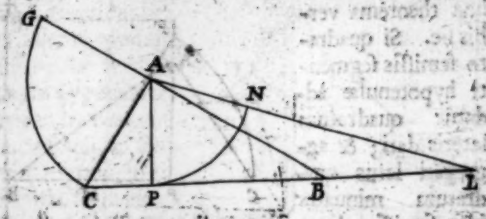


Geometricè sic. Fiat PL=BF. Et extendatur LA ad N, ut AN=AP. Erit LN=BC. Diametro igitur BC describatur semicirculus; in quo statuatur perpendicularis æqualis datæ AP. Et ducantur BA & CA.

Probl: X. Datis summa laterum trianguli rectanguli, BG, & perpendiculari ab angulo recto in hypotenusam, AP: invenire tum hypotenusam, tum triangulum ipsum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam per 4 e 2, BGq =(BAq+GAq, hoc est) BCq+ (2BA×CA, hoc est) 2AP×BC, quia BC. CA :: BA. AP. Erit BCq +2AP×BC=BGq. quare per 9 c 16, √q: APq +BGq: - AP=BC.

Enunciatur



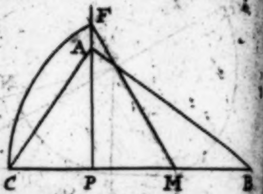
Enunciatur autem hoc theorema sic. Si quadrato perpendicularis addatur quadratum summæ laterum; & aggregati latus quadratum minuatur ipsa perpendiculari: linea reliqua æqualis erit hypotenusæ.

Geometricè sic. Fiat PL $=$ BG & ducatur AL: ex qua abscindatur AN $=$ AP. Erit LN $=$ BC. Diametro igitur BC describatur semicirculus, &c.

Probl: XI. Datis trianguli rectanguli latere alterutro, CA, & alterno segmento hypotenusæ BP: invenire tum alterum segmentum, tum ipsum triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam est BP $+$ CP. CA :: CA. CP. Erit BP$\times$CP$+$CPq $=$ CAq. quare per 9 c 16, $\sqrt{q}: \frac{1}{4}$BPq$+$CAq: $- \frac{1}{2}$ BP $=$ CP.

Enuntiatur autem hoc theorema verbis sic. Si quadrato semissis segmenti hypotenusæ addatur quadratum lateris dati; & aggregati latus quadratum minuatur ipso semisse: linea reliqua erit alterum hypotenusæ segmentum.

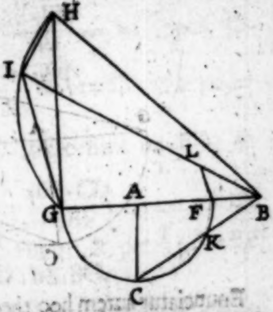


Geometricè sic. Statuantur ad angulos rectos BP & PF=CA & bisecta BP in M, ducatur MF: cui mensuretur æqualis MC. Inventum est igitur CP alterum segmentum: & BC tota hypotenusa. Diametro BC describatur semicirculus: in quo inscribantur CA, & BA.

Probl: XII. Datis trianguli rectanguli differentia segmentorum hypotenusæ BK, & summa laterum, BG: invenire tum differentiam laterum, tum hypotenusam, tum ipsum triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam est BG.BK :: BC.BF: est etiam BGq. BKq :: (BCq, hoc est) BAq +CAq. BFq. Item 2BGq−BKq. BKq :: (2BAq + 2CAq−BFq hoc est) BGq. BFq: Nam per 8 c 18 2BAq+ 2CAq = BGq+BFq. quare √q : 2BGq —BKq. BG :: BK. BF :: BG BC.

Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. Si



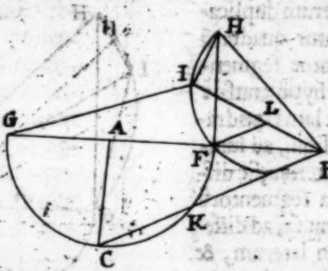
Si è quadrato ſummæ laterum duplicato tollatur quadratũ differentiæ ſegmentorum hypotenuſæ: Erit ut latus quadratum reliqui, ad ſummam laterum; ſic differentia ſegmentorũ hypotenuſæ, ad differentiam laterum, & ſic ſumma laterum ad hypotenuſam.

Geometricè ſic. Statuantur ad angulos rectos BG & GH = BG. tum diametro BH deſcribatur ſemicirculus: in quo inſcribatur HI = BK: & ducatur BI. Eſt igitur BI = √q: 2BGq — BKq. fiat etiam BL = BK. Ducatur GI: eique parallela LF. Ergo inventa eſt BF differentia laterum.

Probl: XIII. Datis trianguli rectanguli differentia ſegmentorum hypotenuſæ BK, & differentia laterum BF: invenire tum ſummam laterum, tum hypotenuſam, tum ipſum triangulum.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam eſt BF. BK :: BC. BG: eſt etiam BFq. BKq :: (BCq, hoc eſt) BAq + CAq. BGq. Item 2BFq — BKq. BKq :: (2BAq + 2CAq — BGq, hoc eſt) BFq. BGq: Nam per 8 o 1 8 2BAq + 2CAq = BGq + BFq: √q: 2BFq — BKq. BF :: BK. BG :: BF. BC.

Enuncia-



Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. Si è quadrato differentiæ laterum duplicato tollatur quadratum differentiæ segmentorum hypotenusæ: Erit ut latus quadratum reliqui, ad differentiam laterum; sic differentia segmentorum hypotenusæ, ad summam laterum: & sic differentia laterum, ad hypotenusam.

Geometricè sic. Statuantur ad angulos rectos BF & FH=BF. tum diametro BH describatur semicirculus, in quo inscribatur BI=BK: & ducatur HI. Est igitur HI=√q:2BFq—BKq: fiat BL=HI. Ducatur FL: eique parallela IG. Ergo inventa est BG summa laterum.

Probl. XIV. Datis trianguli plani cujuscunque differentia laterum FB, differentia segmentorum basis BK, & differentia inter majus latus & basem CL: invenire tum basem, tum summam laterum, tum ipsum triangulum. Et primò sit excessus penes basem. Puta

factum

factum esse quod postulatur: sitque triangulum BCD. Quoniam est FB.BK :: BD. $\frac{BK*BD}{BF} = BG$, per 17 & 18, Th: 16. Erit $\frac{BK*BD - BFq}{2BF} = CF$. adde BF, & $\frac{BK*BD + BFq}{2BF} = BC$. tolle hanc ex BD, & $\frac{2BF*BD - BK*BD - BFq}{2BF} = \frac{2BF*CL:}{2BF}$ Quare $2BF*BD - BK*BD = 2BF*CL + BFq$. & per 3 c 6. $2BF - BK.2CL + BF :: BF.BD :: BK.BG$.

Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. ut differentia inter differentiam laterum duplicatam, & differentiam segmentorum basis, est ad aggregatum differentiæ inter majus latus & basim duplicatæ, & differentiæ laterum; sic differentia laterum, ad basem: & sic differentia segmentorum basis, ad summam laterum.

Geometrica praxis facilior est, quàm ut necesse sit apponi.

Si verò excessus fuerit penes majus latus: theorema erit, $BK \cdot 2BF.\ 2CL - BF :: BF.\ BD :: BK.BG.$

Hujus theorematis investigationem; & problematis quo è datis trianguli plani cujuscunque summa laterum BG, differentia segmentorum basis BK, & differentia inter majus latus & basem CL postulatur invenire tum basem, tum differentiam laterum, solutionem, omitto: ut habeant studiosi analyseos, quo solertiam suam exerceant.

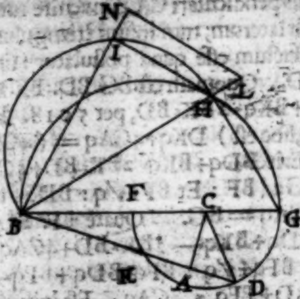
Probl: XV. Datis trianguli plani cujuscunque summa laterum BG, differentia segmentorum basis BK, & perpendiculari CA: invenire tum basem, tum differentiam laterum, tum ipsum triangulum. Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum BCD. Quoniam per 17 c 18 Th: 16. $BG.BD :: BK.BF.$ Et per 5 c 18, $DKq = BDq + BKq - 2BK \times BD.$ Et per 47 e 1 ($4ADq$ hoc est) $DKq + 4CAq =$ ($4CDq$ hoc est) FGq. Erit $BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq = FGq$. Tolle FG ex BG: & $BG - \sqrt{q}: BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq: = BF$. Quare erit,

$BG.BD :: BK.\ BG - \sqrt{q}: BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq.$ Et per 3 c 6, $BK \times BD = BGq - \sqrt{q}: BGq \times BDq + BGq \times BKq - BGq \times 2BK \times BD + BGq \times 4CAq.$

Est igitur per 8 c 16 Q: $BGq - BK \times BD$, hoc est, $BGqq - BGq \times 2BK \times BD + BKq \times BDq = BGq \times BDq + BGq \times BKq - BGq \times 2BK \times BD + BGq \times 4CAq.$

Ideòque $BGq \times BDq - BKq \times BDq = BGqq - BGq \times BKq - BGq \times 4CAq.$ vel etiam, $BGq - BKq$ in

in BDq = BGq — BKq · 4CAq in BGq. Ergo $\sqrt{q}$: BGq−BKq. $\sqrt{q}$: BGq−BKq — 4CAq :: BG.BD :: BK.BF.



Enunciatur autem hoc theorema verbis sic, ut latus quadratum differentiæ inter quadrata summæ laterum, & differentiæ segmentorum basis, est ad latus quadratum ejusdem differentiæ multatæ quadrato perpendiculi duplicati; sic summa laterum, ad basem: & sic differentia segmentorum basis, ad differentiam laterum.

Geometricè sic. Diametro BG describatur semicirculus: in quo inscribatur GH = BK: & BH. Est igitur BH = $\sqrt{q}$: BGq — BKq. Rursus diametro BH describatur semicirculus: in quo inscribatur HI = 2CA: & BI. Est igitur BI = $\sqrt{q}$: BGq − BKq — 4CAq. Fiat BL = BG: & ab L ducatur LN parallela ipsi HI, concurrens cum BI producta in N. Ergo inventa est BN = BD.

Probl.

Probl: XVI. Datis trianguli plani cujuscunq differentia laterum BF, differentia segmentorum ba BK, & perpendiculari CA: invenire tum basem, t summam laterum, tum ipsum triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triang lum BCD. Quoniam est $BG.BD::BK.BF$. Et D $=BDq+BKq-2BK\times BD$, per 5 c 18. Et per 47 ($4ADq$, hoc est) $DKq+4CAq=$ ($4CDq$, hoc FGq. Erit $BDq+BKq-2BK\times BD+4CAq=FG$ Adde FG ad BF: Et $BF+\sqrt{q}: BDq+BKq-2B$ $\times BD+4CAq=BG$. Quare $BF: BD :: BK.$ $+\sqrt{q}: BDq+BKq-2BK\times BD+4CAq$. Item $\times BD=BFq+\sqrt{q}: BFq\times BDq+BFq\times BKq-B$ $\times 2BK\times BD+BFq\times 4CAq$. Est igitur Q: $BK\times$ $-BFq$, hoc est, $BKq\times BDq-BFq\times 2BK\times$ $+BFqq=BFq\times BDq+BFq\times BKq-BFq\times 2BK\times$ $+BFq\times 4CAq$. Ideoque $BKq\times BDq-BFq\times B$ $=BFq\times BKq-BFqq+BFq\times 4CAq$. vel e $BKq-BFq$ in $BDq=BKq-BFq+4CAq$ in B Ergo $\sqrt{q}:BKq-BFq.\sqrt{q}:BKq-BFq+4CA$ $BF.BD::BK.BG$.

Enunciat

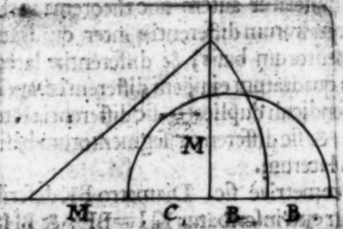
Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. ut latus quadratum differentiæ inter quadrata differentiæ segmentorum basis, & differentiæ laterum, est ad latus quadratum ejusdem differentiæ auctæ quadrato perpendiculi duplicati; sic differentia laterum, ad basem: & sic differentia segmentorum basis, ad summam laterum.

Geometricè sic. Diametro BK describatur circulus: in quo inscribatur KH=BF: & BH. Est igitur BH=√q: BKq—BFq. Fiat BHL=BF: & HKI =2CA. Ducatur BI. Est igitur BI=√q: BKq —BFq+4CAq. Ducatur etiam LN parallela ipsi HI, concurrens cum BI producta in N. Ergo inventa est BN=BD.

Probl: XVII. Datis in triangulo rectangulo differentia inter basem & hypotenusam B, & differentia inter cathetum & hypotenusam C: invenire tum hypotenusam, tum ipsum triangulum.

Pro hypotenusa ponatur A. Basis erit A—B. & Cathetus A—C. & per 47 e 1, Cathetus est √q:2BA —Bq. Quare √q: 2BA—Bq=A—C. Et 2BA —Bq=Aq—2CA+Cq. vel 2B+2C in A mi Aq =Bq+Cq. Ergo per 9 c 16, B+C+√q:2BC=A. hypotenusæ.

Enunciatur



Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. Aggregatum utriusque differentiæ (tum basis tum catheti) ab hypotenusa. unà cum √q duplicis rectanguli sub ipsis differentiis, æquatur hypotenusæ.

Geometricè sic. Ducatur linea infinita in qua mensurentur B, B, & C. hac diametro fiat semicirculus. Et in communi B & C termino statuatur ad angulos rectos linea M. Est igitur Mq = 2BC. mensuretur etiam M in linea infinita post C. Et semidiametro M+C+B describatur arcus donec concurrat cum linea M perpendiculari producta. tum à puncto concursus ad centrum illius arcus ducatur linea pro hypotenusa. Et descriptum erit triangulum rectangulum quæsitum.

Probl: XVIII. Ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum adplicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis alteri parallelogrammo D dato. Oportet autem datum rectilineum non majus esse eo, quod ad dimidium adplicatur. Prop: est 28 è 6.

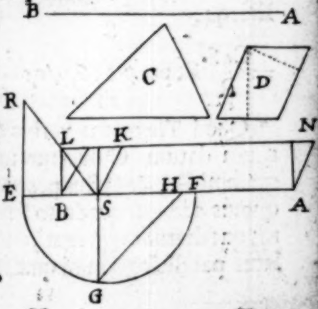
In

In parallelogrammo D, notetur lineis perpendicularibus ejus Altitudo R, & Latitudo S: nec refert utra ex ipsis statuatur major.

Ponatur latus parallelogrammi quæsiti A: portio ablatitia erit AB-A. Fiat S.R :: AB-A. $\frac{AB*R-R*A}{S}$ altitudo parallelogrammi quæsiti: Ducatur in A latus: eritque $\frac{AB*R*A-R*Aq}{S}=C$: vel $AB*A-Aq=\frac{C*S}{R}$ Et per 9, Cap: 16, $\frac{AB}{2}+\sqrt{q}:\frac{ABq}{4}-\frac{C*S}{R}:=A$.

Quod Theorema verbis enuntiatur sic. Si rectilineum C datum ducatur in latitudinem parallelogrammi D; & factus dividatur per altitudinem: & quotus ex quadrato semissis lineæ AB datæ auferatur: latus quadratum reliqui auctum eodem semisse, erit latus parallelogrammi quæsiti.

Geometricè sic: Fiat $ER=\sqrt{q}C$. Tum R.S :: ER. $ES=\frac{\sqrt{C},}{R}$ Statuantur ER & ES ad angulos rectos: Sumptaque SF =ER, diametro EF describatur semicirculus: in quo erectâ perpendiculari SG erit $SGq=\frac{C*S}{R}$.



H Ex

Ex G puncto mensuretur $GH = \frac{1}{2} AB = HB$: eri

$HS = \sqrt{:} \frac{ABq}{4} - \frac{C \times S}{R} :$ cui si adjungas $HA = \frac{1}{2}AB$; eri

AS latus parallelogrammi quæsiti. Et $BS = AB-A$ portioni ablatitiæ. Et BL parallela lineæ ER, eri altitudo. Ergò parallelogrammum quæsitum e ASKN, factum ipsi D æquiangulum.

Probl: XIX. Ad datam rectam lineam AB, da rectilineo C æquale parallelogrammum adplicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alte parallelogrammo D dato, Prop: est 29 e 6.

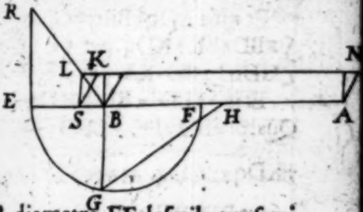
In parallelogrammo D notetur Altitudo & Latitudo, sicut in præcedente.

Ponatur latus parallelogrammi quæsiti A : Porti adjectitia erit $A-AB$. Fiat $S . R :: A-AB . \frac{R \times A - AB \times R}{S}$ altitudo parallelogrammi quæsiti. Ducatur in A latus.

Eritque $\frac{R \times Aq - AB \times R \times A}{S} = C$. vel $Aq - AB \times A$

$= \frac{C \times S}{R}$. Et per 9 c 16, $\sqrt{q:} \frac{ABq}{4} + \frac{C \times S}{R} : + \frac{AB}{2} = A$.

Quod Theorema verbis enunciatur sic. Si rectilineum datum C ducatur in latitudinem parallelogrammi D; & factus per altitudinem dividatur : & quotus addatur quadrato semissis lineæ AB datæ: Latus quadratum aggregati, auctum eodem semisse, eri latus parallelogrammi quæsiti.



Geometricè sic. Fiat $ER = \sqrt{q}C$. Tum $R.S :: ER.EB = \frac{\sqrt{C \times S}}{R}$. Statuantur ER & EB ad angulos rectos: Sumptaque $BF = ER$, diametro EF describatur semicirculus: in quo erecta perpendiculari BG, erit $BGq = \frac{C \times S}{R}$. Esto $BH = \frac{1}{2} AB = AH$. Et ducatur $GH = \sqrt{q}: \frac{ABq}{4} + \frac{C \times S}{R} = HS$: Est igitur $AS = A$ lateri parallelogrammi quæsiti: Et $BS = A - AB$ portioni adjectitiæ. Et altitudo erit SL parallela lineæ ER. Ergo parallelogrammum quæsitum est, ASKN factum ipsi D æquiangulum.

Probl: XX. Datis trianguli plani cujuscunque duobus lateribus BC BD, cum angulo B intercepto: invenire tertium latus, vel datis tribus lateribus: invenire angulum B, uni ipsorum oppositum.

Esto factum quod postulatur: sitque triangulum BCD. Centro B, semidiametro BC, describatur arcus CK: & perpendicularis CA. Est igitur KD differentia laterum: & AK similis sinui verso anguli B. Nam Rad. svB :: BK. AK. Estque $AK = \frac{BK \times svB}{Rad.}$. Est autem etiam $AK = BK \mp BA$: ut ex schematibus comparatis liquet.

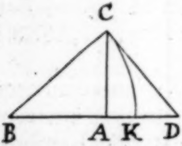
Et quia $BDq + BKq =$ tum

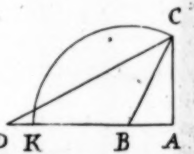
$$\left\{ \begin{array}{l} 2BD \times BK + KDq. \text{ per } 5\ c\ 18 \\ CDq \pm 2BD \times BA. \text{ per } 2,3,\ c\ 19 \end{array} \right\}$$

Erit $2BD \times BK + KDq = CDq \pm 2BD \times BA$.
Quare $2BD \times BK \mp 2BD \times BA$. hoc est, $2BD \times AK$
$+ KDq = CDq$. at verò $2BD \times AK = \dfrac{2BD \times BC \times sv\,B}{Rad:}$

Ergo $\dfrac{2BD \times BC \times sv\,B}{Rad:} + KDq = CDq$. Quod est

theorema primum. Et $\dfrac{CDq - KDq \text{ in } Rad:}{2BD \times BC} = sv\,B$.
Quod est theorema secundum.





Enunciatur quidem verbis primum theorema sic: Si duplicatum rectangulum sub lateribus datis ducatur in sinum versum anguli intercepti: & factus dividatur per Radium: Quotus auctus quadrato differentiæ laterum æqualis erit quadrato tertii lateris.

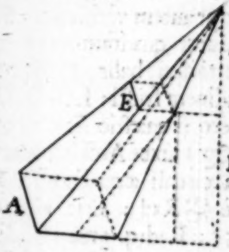
Secundum verò sic: Si differentia quadratorum lateris oppositi, & differentiæ laterum, ducatur in Radium: & factus dividatur per duplicatum rectangulum sub lateri-

lateribus continentibus: Quotus æqualis erit sinui verso anguli quæsiti.

Probl: XXI. Datis frusti Pyramidis utraque base Aq, Eq, & altitudine L: invenire mensuram frusti.

Prænoscendum est ex 7 & 10 e 12. quod parallelepipedon æquatur tribus pyramidibus; Et Cylindrus æquatur tribus conis, ejusdem basis & altitudinis.

Estque altitudo pyramidis abscissæ (T) primò quærenda, sic, A—E. E::L. T. Quare $\frac{LE}{X} = T$. Et altitudo totius pyramidis est L+T. Item pyramis toto tripla est AqL+AqT. Et pyramis abscissa tripla est Eq T. Ergo triplum frustrum pyramidis est AqL +AqT−EqT.



Hoc theorema ostendit unum modum commensurandi frustum pyramidis: Enunciatur autem verbis sic.

Si solidum sub base majore & tota altitudine multetur solido sub base minore & altitudine pyramidis abscissæ: reliqui triens æqualis erit frusto.

Rursus quia 2 c 11. $Aq-Eq = ZX$: & T $= \frac{LE}{X}$ Erit $AqL+$ (ZEL, hoc est per 3 e 2) AEL $+EqL = AqL+AqT-EqT$. Ergo triplex frustum pyramidis est etiam $Aq+Eq+AE$ in L. hoc theorema docet alterum modum commensurandi frusti : enunciatur autem verbis sic.

Si aggregatum utriusque basis frusti pyramidis, & mediæ inter ipsas proportionalis, ducatur in altitudinem frusti: facti triens æqualis erit frusto.

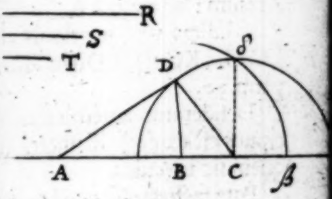
Item quia per 2 c 11, $2Aq+2Eq = Zq+Xq$: Erit $ZqL+XqL+2AEL$ æquale sex frustis. at per 11 e 18. $Xq+2AE = Z$. Ergo $Zq+Z$ in L æquale est sex frustis pyramidis. Atque hoc Theorema docet tertium modum commensurandi frusti pyramidis. Enuntiatur autem verbis sic. Si ad aggregatum basium addatur quadratum aggregati laterum quadratorum utriusque basis, & summa eorundem ducatur in altitudinem frusti : facti sextans æqualis erit frusto.

At verò si quæstio sit de commensurando frusto Coni. Quia juxta Archimedæum inventum, semiperipheria circuli æqualis est $\frac{22}{7}$ Radii ferè : vel magis accuratè $\frac{355}{113}$ Rad : Erit area circuli $\frac{355}{113}$ Rad: q. E 113. 355 :: Rad:q. area circuli. Quare Theorema primum de commensurando frusto coni, est $\frac{355}{452}$ Aq $+\frac{355}{452}$ AqT $-\frac{355}{452}$ EqT, æquatur triplo frusto. Secundum est $\frac{355}{452}$ Aq $+\frac{355}{452}$ Eq $+\frac{355}{452}$ AE in L, æquatur triplo frusto. Tertium est $\frac{355}{452}$ Zq $+\frac{355}{452}$ Z in L, æquatur sextuplo frusto Coni.

Prob

Probl:XXII. Problema Apolonii Pergæi ἐν ἀναλυομένῳ τόπῳ. Datis in plano duobus punctis A,B, describere circulum, in cujus circumferentiam rectæ lineæ, AD,BD, ab iisdem punctis ductæ, datam habeant rationem R ad S.

Puta factum esse quod quæritur: sitque circuli quæsiti centrum C in eadem recta linea cum punctis A, B; & semidiameter CD. Fiat R.S : : S.T. Quia triangula duo ACD,DCB(ubicunque sumitur punctum D) sunt ut AC ad BC: Et latera DA,DB, communi angulo C similiter opposita, sunt in ratione R ad S: & latus CD utrique commune: Non difficile erit concipere triangula ipsa ACD, DCB esse similia. Quare R, S::DA.DB::AC. DC::DC.BC. Et per 1 c 15, AC. BC::Rq.Sq ::R.T. Si igitur pro BC ponatur A : Erit AB+A. A :: R.T. Et $AB \times T + T \times A = R \times A$: vel $\frac{AB \times T}{R - T} = A$. Denique $\sqrt{:AC \times BC:} = DC$.



Quæ enuntiatur verbis sic. Si punctorum intervallum ducatur in tertium rationis datæ terminis proportionalem : & factus dividatur per excessum termini primi supra tertium : Quotus æqualis erit distantiæ puncti citerioris à centro. Et latus quadra-

tum rectanguli sub utraque distantia à centro, æquatur semidiametro. Geometrica effectio facillima est.

Probl: XXIII. Datis dolii, sive vasis vinarii, longitudine interna 2CL, & semidiametris tum medii CB, tum basis LD: invenire dolii ipsius capacitatem. Est quidem dolium frustum sphæroideos, quæ fit revolutione semissis ellipseos super diametrum suam transversam sive axim. Ad mensuram autem frusti inveniendam, tum totius sphæroideos, tum abscissarum portionum mensuras sciri oportet: harum enim mensurarum differentia est mensura frusti.

Soliditas totius sphæroideos est $\frac{355}{113}$ BCq in $\frac{2}{3}$ IK: qui duplus est conus basis BCB, & altitudinis IK: Archim: de conoid: & spæroid: prop. 29.

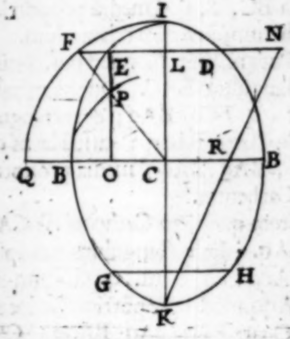
Soliditas verò portionis IED abscissæ habetur sic: LK.LK+KC:: $\frac{355}{113}$ LDq in $\frac{1}{3}$ LI. Soliditas quæsita. Ibid. prop. 31.

Desideratur autem adhuc (qui hujus negotii præcipuus est cardo) diameter transversa sive axis IK: quem sic invenies.

Puta factum esse quod postulatur: Et describatur ellipsis: & reliqua; sicut in schemate. Et fiat CK. CB:: CB. $\frac{CBq}{CK}$ = CR, quod est semilatus rectum per 13 l 1 conic: Apoll. Iterum fiat CK. $\frac{CBq}{CK}$ :: CK + CL. $\frac{CBq \text{ in } CK+CL}{CKq}$ = LN. ducatur in IL, hoc est CK—CL (quod idem est ac si ducatur CBq in CKq

CKq−CLq per 11 c 18) fietque $\frac{CBq \times CKq - CBq \times CLq}{CKq}$ =LEq. per 13 l 1 conic: Apoll. Ergo $\sqrt{q} \frac{CBq \times CLq}{CBq - LEq}$ =CK, semi-axi; hoc est $\frac{CB \times CL}{OP}$ = CK.

Quod theorema verbis enunciatur sic. Si quadratum semidiametri medii dolii ducatur in quadratum dimidiatæ longitudinis: & factus dividatur per differentiam quadratorum à semidiametris medii & basis: quoti latus quadratum erit semiaxis sphæroideos.



Geometricè sic. Ducatur EO parallela axi. Et semidiametro CP = CB fiat arcus secans ipsam EO in P. continuetur CP donec concurrat cum base LE producta in F. Erit CF æqualis semiaxi quæsito.

Consectarium. Atque hinc patet meridianos in Analemmate esse veras Ellipses. verbi gratia, cogitetur quadrans Analemmatis CIFQ: in quo descripta sit Ellipsis IEB. Dico eandem esse Meridianum. Nam cum

cum CQ sit quadrans Æquinoctialis, & FL quadrans paralleli: sitque meridianorum proprium secare Æquinoctialem, & omnes circulos ipsi parallelos, in segmenta similia, per 10, l 2 Theod: de sphæra. Si igitur constiterit esse CQ. CB :: LF. LE: Ellipsis IEB secans ipsos erit meridianus. At verò $CF = CQ$: & $CP = CB$: & $OC = LE$: Estque CF. CP :: LF. OC. Ergo,

Probl: XXIV. Datis trianguli rectanguli hypotenusa BC, & CM mediâ proportionali inter basem & cathetum; invenire triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam basis est BA, Cathetus erit $\surd q: BCq - BAq$: & rectangulum sub ipsis $\surd q: BCq \times BAq - BAqq$: cujus latus quadratum est $\surd qq: BCq \times BAq - BAqq$; media proportionalis inter basem & Cathetum.

Item quoniam Cathetus est CA, Basis erit $\surd q: BCq - CAq$. Et rectangulum sub ipsis, $\surd q: BCq \times CAq - CAqq$: cujus latus quadratum est $\surd qq: BCq \times CAq - CAqq$: media proportionalis inter basem & Cathetū.

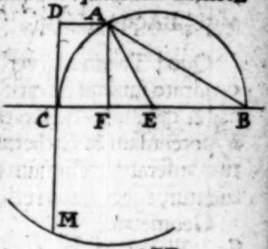
Quare $BCq \times BAq - BAqq = CMqq$. Et
$$BCq \times CAq - CAqq = CMqq.$$

$$\text{Ergo per } 9c16, \tfrac{1}{2}BCq \pm \surd q: \tfrac{1}{4}BCqq - CMqq. = \left.\begin{matrix} BAq \\ CAq \end{matrix}\right\}$$

Quod Theorema enuntiatur verbis sic. Si dimidiato hypotenusæ quadrato, latus quadratum excessus quadrantis quadrato-quadrati hypotenusæ supra quadrato-quadratum medii proportionalis inter basem & Cathetum, addatur; aggregatum erit basis quadratum

dratum: ſin auferatur, reliquum erit quadratũ Catheti.

Geometricè ſic. Diametro BC, & centro E medio, deſcribatur ſemicirculus: Tum fiat BC.CM::CM.CD =AF perpendic: intra ſemicirculum. Eſt igitur BC×AF=CMq. compleatur triangulum BAC. Nam $\frac{1}{4}$ BCq(AEq) - AFq=EFq.



$$\text{Quare } \tfrac{1}{2}\,BC \pm (EF)\ \surd q{:}\ \tfrac{1}{4}BCq - AFq{:} = \begin{cases} BF. \\ CF. \end{cases}$$

Ducantur omnia in BC: fietque

$$\tfrac{1}{2}BCq \pm \surd q{:}\tfrac{1}{4}BCqq - (BCq \times AFq)CMqq{:} =$$
$$= \begin{cases} BC \times BF = BAq. \\ BC \times CF = CAq. \end{cases}$$

Probl: XXV. Datis trianguli rectanguli baſe BA, & AM mediâ proportionali inter hypotenuſam & Cathetum, invenire triangulum.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam Cathetus eſt CA, hypotenuſa erit √q: BAq+ CAq: Et media inter ipſas proportionalis √qq: CAqq+BAq×CAq.

Item quoniam hypotenuſa eſt BC, cathetus erit √q BCq - BAq: Et media inter ipſas proportionalis √qq: BCqq-BAq×BCq.

Quare CAqq+BAq×CAq=AMqq. Et

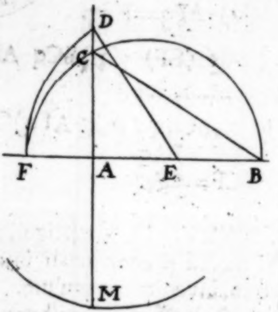
BCqq-BAq×CAq=AMqq. Ergò per 9c16

√q:

$$\surd q : \tfrac{1}{4} BAqq + AMqq : \mp \tfrac{1}{2} BAq = \begin{cases} CAq. \\ BCq. \end{cases}$$

Quod Theorema verbis enunciatur sic. Si lateri quadrato summæ ex quadrante quadrato-quadrati basis, & quadrato-quadrati mediæ proportionalis inter hypotenusam & Cathetum, dimidiatum basis quadratum auferatur, reliquum erit Catheti quadratum: sin addatur, aggregatum erit quadratum hypotenusæ.

Geometricè sic. Fiat BA. AM :: AM. AD perpendic: est igitur $BA \times AD = MAq$. ex medio basis puncto E ad perpendicularem AD, ducatur ED=EF Et diametro BF describatur



semicirculus secans AD in C. Tum ducta BC compleatur triangulum BAC. Nam $\tfrac{1}{4} BAq + ADq = EFq$.

Quare $\surd q : \tfrac{1}{4} BAq + ADq : \mp \tfrac{1}{2} BAq = \begin{cases} AF. \\ BF. \end{cases}$

Ducantur omnia in BA: fietque

$$\surd q : \tfrac{1}{4} BAqq + (BAq \times ADq) Mqq : \mp \tfrac{1}{2} BAq = \begin{cases} BA \times AF = CAq. \\ BA \times BF = BCq. \end{cases}$$

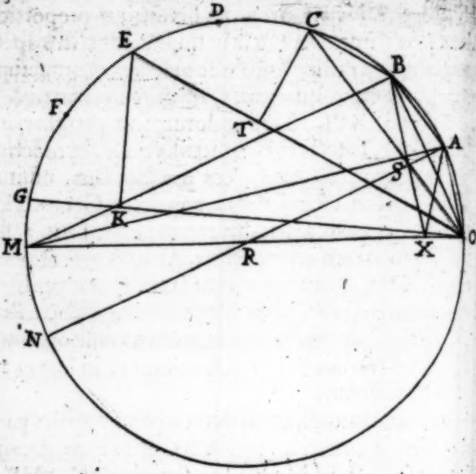
Con-

Consectarium. Atque ex his duabus proportionibus patet æquationum, in quibus sunt tres species æqualiter in ordine scalæ adscendentes, quarum suprema sit quadrato-quadratica, effectio Geometrica.

Probl: XXVI. De angulorum sive peripheriarum bisectione, trisectione, quinquisectione, septisectione, pauca etiam, ad Analytices præstantiam, usumque admirandum, ostendendum, apponam, Geometricam quidem praxim adhuc inventam non habent: sicut nec Mesolabium inventum est. At verò in Sectione 15 Cap.XVIII, Æquationes quasdam Cubicas prælibavi; qua etiam solertia, aliàs innumeras Analytices studiosus poterit comminisci, quarum fortasse ope mesolabium hactenus tenebris obvolutum, in lucem tandem proferatur.

Distinguantur in peripheria septem æquales partes ab O fine diametri literis A B C D E F G: ducantur subtensæ, sicut fit in schemate. Sumatur MX = MB. ducantur etiam AX & XB; & diameter NRA; & ad OE perpendicularis CT. Quoniam per 17, Cap:XVIII, Theor:1, AB = AX: erunt triangula BMX, ORA, OAX, similia; ideoque $\frac{OAq}{Rad}$ = OX. Sunt etiam triangula OAB, ARM, similia. Et per 47 e 1, MA = √q:4Radq - OAq.

His



His sic præmissis, erit RA. MA, hoc est, Rad. $\sqrt{q}$: 4Radq — OAq :: OA. OB. Ergo $\frac{4Radq \cdot OAq - OAqq}{Radq} = OBq$: quæ est anguli duplicatio.

Et $4Radq \cdot OAq - OAqq = Radq \cdot OBq$: quæ est anguli bisectio.

Deinde quia $OS = OA$. & $SA = OX$. & $NS = MX = MB$. erit per 17 & 18 Th: 16, $\frac{NS \cdot SA}{OS} = SC$: hoc est $2Rad - \frac{OAq}{Rad}$ in $\frac{OAq}{Rad}$ divisa per OA, vel

2Radq

$\frac{2Radq \times OA - AOc}{Radq} = SC$. Et si addatur OA, fiet $\frac{3Radq \times OA - OAc}{Radq} = OC$: quæ est anguli triplicatio. Et $3Radq \times OA - OAc = Radq \times OC$: quæ est anguli trisectio.

Item quia $2ET + CB = OE$ Et $MO.MB :: OC.OT$: hoc est $2Rad.\ 2Rad. - \frac{OAq}{Rad} :: \frac{3Radq \times OA - OAc}{Rad}$ $\frac{6Radqq \times OA - 5Radq \times OAc + OAqc}{2Radqq}$: E cujus duplo si tollatur OA: restabit $\frac{5Radqq \times OA \quad 5Radq \times OAc + OAqc}{Rqq} = OE$: quæ est anguli quintuplatio. Et $OAqc - 5Radq \times OAc + 5Radqq \times OA = Radqq \times OE$: quæ est anguli quinquisectio.

Atque hac forma progredi licet ad Sept. sectionem inveniendam, Nempe $7Rcc \times OA - 14Rqq \times OAc + 7Rq \times OAqc + OAqqc = Rcc \times OG$.

Nam $MO.\ MB :: OE.OK$. Et $2OK - OC = OG$. Operationem studiosis relinquo.

Verùm quia Radius ponitur 1, quæ in Multiplicatione & Divisione, nihil mutat: idcircò in hisce omnibus Æquationibus, Radius cum omnibus suis potestatibus, omitti poterit.

Sed quo artificio istiusmodi operosæ Æquationes (in quibus non sunt tantùm tres species æqualiter in

ordine

ordine ſcalæ adſcendentes) ſolvantur, quanquàm non eſt hujus inſtituti docere: tamen quid in hoc negotio in uſum nobiliſſimi doctiſſimique Domini Gerardi Aungier, Domini Aungier & Baronis de Longford, ante plurimos annos, commentus ſum, in gratiam ſtudioſorum Mathematices, qua poſſum brevitate, in lucem proferre non pigebit.

SOLI DEO GLORIA.

DE ÆQVATIONVM ADFECTARUM RESOLUTIONE IN NUMERIS.

1. CONstruendæ Æquationis adfectæ modus. Sumatur, ut lubet, pro B, 3: pro Cq, 16: pro Dc, 125: pro Fqq, 1296: &c. Nec refert utrum numeri sumpti sint verè figurati necne. Sitque ex his Coëfficientibus construenda Æquatio Quadrato-cubica. Ea pro modo Tabulæ Analyticæ posterioris in ordine Quadrato-cubico, conflata, esto Lqc - 5BLqq + 10CqLc - 10DcLq + 5FqqL = Gqc. Quæ in numeris, statuendo L. (radicem) 47, erit 1qc - 15qq + 160c - 1250q + 6480l = 170304782. vel omissa unciarum distinctione, pro 15qq, dic BLqq; pro 160c, dic CqLc; pro 1250q, dic DcLq; & pro 6480l, dic FqqL. Nam si L sit 47; erit Lq = 2209: & Lc = 103823: & Lqq = 4879681: & Lqc = 229345007.

Con-

Constructionis hujus Practica.

BLqq	229345007
15 × 4879681	−73195215
CqLc	156149792
160 × 103823	+16611680
DcLq	172761472
1250 × 2209	−2761250
FqqL	170000222
6480 × 47	+ 304560
	170304782

2. Proponatur Æquatio quæcunque, puta modò inventam,

1qc−15qq+160c−1250q+6480l = 170304782

Vel numeris in symbola mutatis,

Lqc−BLqq+CqLc−DcLq+FqqL=Gqc:

Et si plures essent adfectionum Species, consequenter efferri poterunt per Hcc, Kqqc, Mqcc, Nccc, & sic ulterius.

3. Radicis L ex his investigandæ duæ erunt partes, nempe A latus primum, & E latus secundum, sive subsequens quodlibet. Quare L=A+E: & omnes potestates ex L, æquantur consimilibus potestatibus ex A+E: v.g. Lq=Aq+2AE+Eq: & Lc=Ac+3AqE+3AEq+Ec. &c.

Qui igitur numerosam hanc potestatum adfecta-

rum

rum resolutionem cupit addiscere, eum in putarum potestatum Genesi & Analysi, bene versatum esse oportet.

4. In Æquatione propositâ, potestas resolvenda 17030478 2, sive Gqc, est Quadrato-cubica, cujus etiam generis sunt singulæ adfectionum Species. Nam *Heterogenea inter se nec addi possunt, nec subtrahi.*

5. Quare in singulis adfectionibus duo sunt consideranda, Gradus adfectionis, & Coëfficiens: ut in 15qq, adfectionis gradus est Quadrato-quadraticus, & coefficiens 15, lateralis: In 160c, adfectionis Gradus est cubicus, & Coefficiens 160, Quadraticus: In 1250q, adfectionis Gradus est Quadraticus, & coefficiens 1250, cubicus: denique in 6480l, adfectionis gradus est lateralis, & coefficiens 6480, Quadrato-quadraticus: sicut ex utraque Æquationis designatione comparata clarissimè liquebit. Atque hinc duo oriuntur Consectaria pro laterum singularium extractione.

6. Primum Consectarium est, Si coefficientis pro sua specie, radix, ducta in adfectionis gradum, multiplicet ipsum coefficientem: factus erit ejusdem generis cum potestate resolvenda: Ut in præcedente Æquatione, si latus 15 Quadrato-quadraticè multiplicatum, ducatur in 15; & si √q 160 cubatum, ducatur in Quadratum 160; & si √c 1250 quadratum, ducatur in cubum 1250; denique si √qq 6480 ducatur in Quadrato-quadratum 6480; ex singulis hisce multiplicationibus emerget numerus Quadrato-cubicus. *Atque hæc multiplicatio Analytica, modus est*

est reducendi coefficientem quemlibet ad speciem potestatis resolvendæ, in lateris primi singularis extractione usitatissimus.

7. Unde etiam clarissimè liquet, quod si numerus ex coefficientibus hoc modo reductis, atque comparatis, emergens, minor sit potestate resolvenda, latus ipsius etiam minus est latere potestatis resolvendæ; Si verò major, est majus; & si æqualis, æquale. In hac igitur Æquatione, 1qc−15qq+160c−1250q+6480l $=$ 170304782: vel 170304782+15qq−160c+1250q −6480l $=$ 1qc, si tum coefficiens lateralis 15, tum $\sqrt{}$q160, tum $\sqrt{}$c 125, tum $\sqrt{}$qq 6480, Quadrato-cubentur; prodibunt quatuor adfectionum species homogeneæ, nempe 7593..,3238..,1450.., 0581.., Quod quidem per Logarithmos facillime fit, satisque pro proposito acuratè. Operationis ratio ex fine hujus Tractatus (ubi de Logarithmorum notitiâ pauca traduntur) petenda, sic est.

Loga-

Logarithmi.	Numeri Coefficientes.
5 * 1,17609	1599
5,88045	7593..
2) 2,20412	1600
5 * 1,10206	
5,51030	3238..
3) 3,09691	12509
5 * 1,03230	
5,16150	1450..
4) 3,81157	64801
5 * 0,95289	
4,76445	0581..

In Æquatione igitur propositâ, speciebus pro signorum ratione in unam summam aggregatis, erit 170304700+759300—323800+145000—058100 =1qc=170827100. Quod etiam in aliis æquationibus similiter fieri poterit.

8. Secundum est, Si potestas resolvenda per Coefficientem dividatur, quotus ad ipsum adfectionis gradum referretur :. hoc est, quotus erit latus, si adfectio sit sub latere; vel quadratum, si sub quadrato; & sic de reliquis gradibus : Ut in priore Æquatione, si

si 17030478 2 dividatur per 15, quotus erit Quadrato-quadraticus; si per 160, quotus erit cubicus; si per 1250, quotus erit Quadraticus; si denique per 6480, quotus erit lateralis. Quare non semper ipse quotus, sed ipsius plerumque radix pro adfectionis gradu, erit latus singulare eliciendum.

9. In secundæ etiam radicis investigatione hoc teneri debet; quòd pro numero figurarum in quoto censendus fere erit ejus gradus: ut si quotus unica constet figura, sit latus; Si duabus, Quadratum; si tribus, cubus, &c. Et si quotus superet 5, vel 50, vel 500, &c. ad gradum fortasse sequentem, in grandioribus præsertim adfectionibus, poterit extendi. Atque *hæ sunt divisionis Analyticæ leges.*

10. Nec in istiusmodi *Multiplicatione* atque *Divisione*, totam potestatem resolvendam, cum toto Coefficiente, percurrere opus erit; Sed solummodo ad punctum congruens proximum.

11. Nam in resolutione adfectarum Æquationum punctationes omnes graduum fieri debent, in potestate resolvendâ, sicut in puris: Supremi quidem gradus supra: reliquorum verò infra. Coefficientes etiam, pro suâ quisque specie, punctandi sunt. Prioris exempli punctationes sic erunt,

$$1qc - 15qq + 160c - 1250q + 6480l = 170304782$$

12. Debet autem regulariter (præsertim si Coefficiens

ciens sit negativus) numerus punctorum in singulis esse æqualis. Quare si potestas resolvendæ puncta plura, sive pauciora habeat supra se, quam Coefficiens; tot deficienti præponantur circuli, ut puncta utrobique possint esse æqualia. Et in singulis lateribus eruendis punctum coefficientis lateri illi proprium, ad parile potestatis resolvendæ punctum superius, accommodandum est: quod quidem fiet, si unitatis locus in coefficiente, ad puncta potestatis inferiora gradui suo convenientia, ordine dimoveantur.

13. Si Coefficiens aliquis sit fractio, sive latus surdum; reducatur ad integros cum partibus decimalibus.

14. Et si opus sit radicis eductionem in partibus decimalibus persequi: post lineam separatricem circulos quot visum erit adscribes, eosque supra & subtus, punctis consimiliter insignire perges.

15. Tabula ostendens tum *Divisores*, tum *Gnomones*, pro laterum singularium in Æquationibus adfectis investigatione; collecta & continuanda ex tabella Analytica posteriore. Et nota, quod Coefficientis cujusque species omnes sunt adfirmatæ, si ipsa sit adfirmata; negatæ vero, si negata.

Pro primo Latere.	Pro lateribus singularibus sequentibus, ad complendum *Gnomonem*.
Aq BA	2AE . Eq } = Cq BE .
Ac BAq CqA	3AqE . 3AEq . Ec } = Dc B2AE . BEq . CqE .
Aqq BAc CqAq DcA	4AcE . 6AqEq . 4AEc . Eqq } = Fqq B3AqE . B3AEq . BEc . Cq2AE . CqEq . DcE .
Aqc BAq CqAc DcAq FqqA	5AqqE . 10AcEq . 10AqEc . 5AEqq . Eqc } = Gqc B4AcE . B6AqEq . B4AEc . BEqq . Cq3AqE . Cq3AE . CqEc . Dc2AE . DcEq . FqqE . &c.

16. *Divisores* ubique sumuntur ex iis, quæ in data habentur mensura, justo ordine dispositis, atque Aggregatis, habita signorum ratione.

17. Si Æquationis alicujus suprema potestas sit negativa, Æquatio illa est ambigua.

18. Latus singulare primum elicitur ex his *Regulis*, desumptis ex duobus consectariis in Sect. 6. & 8.

Prima. Si Coefficiens ita longè in posteriora decedit, ut vix ad primum potestatis resolvendæ punctum pertingat, nec (Analyticè etiam reductus) enormem in illo mutationem faciat: in extractione lateris singularis primi, negligi omnino poterit.

Secunda. Si Coefficiens in anteriora prorumpit, sitque adfirmativus e devolvendus est in puncta consequentia, donec locus divisioni fiat, Per quam divisionem quotus inventus ad gradum adfectionis referretur. Quod etiam in extractione minoris radicis Æquationis ambiguæ intelligi debet.

Tertia. Si vero negativus sit, & pluribus constet punctis, quam potestas resolvenda; suppleantur loci deficientes circulis præfixis: & pro latere primo singulari, sumatur ipsa coefficientis, pro suo genere, radix.

Quarta. Si utrobique puncta sint æqualia, & numeri in primo tum coefficientis, tum potestatis resolvendæ, puncto, non multum discrepent: Coefficiens per radicem suam, pro specie qua punctatur, sub congruente puncto extractam, ad potestatis speciem (per Analyticam multiplicationem) reductus, potestati resol-

resolvendæ addatur, si sit negativus; vel auferatur, si adfirmativus. Nam si sit Ac+CqA=Dc, erit Ac =Dc∓CqA. At si Æquationis ambiguæ latus majus quæratur, Potestas resolvenda è coefficiente reducto auferatur. Nam si sit CqA−Ac=Dc, erit Ac=CqA −Dc. Tum summæ vel differentiæ radix, erit latus primum eliciendum. Et nota, quod Æquationis ambiguæ latus majus, aliquando per divisionem; aliquando per extractionem radicis è coefficiente; sed plerumquè per reductionem coefficientis investigatur.

19. Atque his præceptis solerter perpensis, Illud demùm verum latus singulare primum erit, quod primò omnium talem exhibet diagonalem, qui unà cum coefficientibus, sicut Æquationis conditio postulat, juxta tabellam præcedentem, multiplicatis; omnibusque in unam summam (diligente ubique tum signorum, tum sedium respectu habito) aggregatis; numerum profert potestate resolvendâ, unde subtrahendus est, non majorem. Notandum autem est, quòd numerus negativus quantuscunque, minor est omni tum adfirmativo, tum negativo minore: ut −4 minor est quam 1, & quam −1. Item quòd subductio mutat signum numeri subducendi: ut ex 4 tolle 6, restat 4−6, hoc est −2. Et ex −4 tolle −6, restat −4+6, hoc est 2. Denique ex 4 tolle −6, restat 4+6, hoc est 10. Quare in lateris primi singularis extractione, tentandum aliquoties est, donec latus verum inveneris; quod per proximè majus, certissimè agnosces.

20. In

20. In constitutione divisoris pro secundo latere investigando; Coefficientis ductæ in gradum quemlibet, sedes ordinari debet secundum proprii gradus punctationem: hoc est, Coefficientis sub latere sedes distabit versus sinistram, à puncto sive sede ipsius Coefficientis, uno loco: Coefficientis sub quadrato sedes, duobus locis: sub cubo, tribus: &c. Et ob vitandam confusionem, utile erit in residuo potestatis resolvendæ, punctationes illas, quæ præsenti radici eruendæ inserviunt, solas distinguere.

21. Tum latus singulare secundum elicietur sic: Divisores cujusque generis, ex tabula præcedente inventi, & justo ordine dispositi, in unam summam aggregentur; & per totalem illum divisorem, reliquum potestatis resolvendæ dividatur. Nam quotus juxta divisionis Analyticæ leges (si id usus exigat) perpensus, dabit latus singulare secundum eliciendum. Cæterum in hac investigatione multotiès, præsertim si magnitudinum dividentium negativarum aggregatum, aggregato adfirmativarum penè æquetur (adeò ut Divisor Reliquo potestatis resolvendæ minor admodum sit) maxima inest lubricitas: quam tamen Analysta sagax facile effugiet.

22. Hæc igitur Regula esto perpetua. Illud demùm verum latus singulare secundum est; quod primò omnium talem exhibet *Gnomonem*, constantem ex complementis cujusque generis, & Coefficientibus, sicut Æquationis conditio postulat, juxta tabulam præcedentem, multiplicatis; omnibusque in unam summam,

summam, diligente ubique tum signorum, tum sedium, habita ratione, aggregatis; qui *Gnomon* non major sit potestate resolvenda unde subtrahendus est. Quare tentandum aliquoties est, donec latus verum inveneris: quod etiam per proximè majus, certissime agnosces.

23. Latera omnia singularia post secundum, per Divisionem simplicem facillimè acquiruntur.

24. Si adfectiones sint compositæ ex adfirmativis, & negativis: antecedentia præcepta mixtim sunt cum solertia & judicio usurpanda. Et in lateribus æstimandis præponderabit semper adfectio major, minori. Verum totum hoc negotium Analyticum, quod verbis enarrare difficillimum foret, frequens exercitatio, tum in Genesi, tum in Analysi potestatum cujusque generis, facile satis reddet, atque familiare.

25. Sed quia superius aliquoties dictum est, tentatu opus esse; quod quidem in adfectionibus multiplicibus, & ubi gradus sunt elatiores, valde laboriosum erit: adponam hic, coronidis loco, duos modos ejusmodi tentamenti levandi: unum per Depressionem, ex Cap. XVI. Sect 7. *Clavis*: alterum per Canonem Logarithmorum 10000. In utroque autem si Æquatio fuerit ambigua, signa ejus omnia erunt mutanda. Notandum etiam hic est, quod numerus negativus quantuscunque, minor est omni tum adfirmativo, tum negativo minore.

26. Inventio laterum singularium per Depressionem. Si latus primum quæratur: In singulis Æquationis

tionis datæ speciebus abscindantur lineâ separatrice omnia puncta post primum. Deinde adplicentur omnes species ad latus; hoc est, deprimantur uno gradu.

Exampl:I. 1qq−72c+238600l=8725815. Hæc
Deprimendo fiet 1c+238,6−7,2q=L) 872,5.
Esto A 4. erit 4) 872,5 (218,1, justus.
Et +64+238,6−115,2=187,4, minor justo.
Esto A 5 erit 5) 872,5 (174,5, justus.
Et +125+238,6−180,0=183,6; major justo.
Latus igitur verum A=5−1, hoc est, 4.

Exampl:II. De Æquatione ambigua. 1c−3257l = −45744. Hæc deprimendo fiet 1q−32,5=L)−45,7.
Esto A 4. Erit 4)−45,7(−11,4, justus.
Et +16−32,5=−16,5, minor justo.
Esto A 5. erit 5)−45,7(−9,1, justus.
Et +25−32,5=−7,5, major justo.
Latus igitur verum A=5−1, hoc est, 4.

Si latus secundum quæratur: In singulis speciebus abscindantur omnia puncta post secundum. Deinde adplicentur omnes species ad quadratum; hoc est, deprimantur duobus gradibus. Ut in Exemplo I.

$1qq - 72c + 338600l = 8725815$. Hæc Deprimendo fiet $1q + L$) $338600 - 72l = Q$) 8725815.

Esto A 47: erit 2209) 8725815 (3949. Justus.
Et $2209 + 5077 - 3384 = 3896$, minor justo.
Esto A 48: erit 2304) 8725815 (3787. Justus.
Et $2304 + 4971 - 3456 = 3819$: major justo.
Latus igitur verum est 48 — 1, hoc est, 47.

27. Inventio lateris singularis secundi per *Logarithmos*.

Index Logarithmi cujusque desumitur ex tabella in initio *Clav*: pro distantia primæ suæ figuræ, ante vel post locum unitatum, cujus Index est 0. Eædem igitur figuræ, eodem ordine dispositæ, eundem habent Logarithmum: Indices vero diversi esse possunt. Ut numeri 436, Log: est 2,6394865 at numeri 43600, est 4,6394865. & numeri 4|36, Log: est 0,6394865. Denique numeri 0|00436, Log: est $\bar{3}$,6394865.

Summæ duorum Logarithmorum, Logarithmus est facti à valoribus: differentiæ autem, Logarithmus est quoti. Ut quia $4{,}36 \times 9 = 39{,}24$ hujus Log $1{,}5937290 = 0{,}6394865 + 0{,}9542425$. Et quia 9) 39|24 (4,36: hujus Log: $0{,}6394865 = 1{,}5937290 - 0{,}9542425$.

Logarithmus lateris, ductus in numerum dimensionum cujusque potestatis, est ejusdem potestatis Logarithmus:

rithmus : Ut quia numeri 436, Log: est 2,6394865 I. Erit 2,6394865×2 = Log: Q:436. Et 2,6394865×3 = C: 436: Et 2,6394865×4 = QQ:436. &c.

Logarithmus potestatis cujusque divisus per numerum dimensionum suarum, exhibet Logarithmum radicis suæ.

Si in Serie Geometricè continuè proportionalium Logarithmus primi termini tollatur è Logarithmo secundi, reliquus erit Logarithmus rationis : Qui, si in numerum terminorum minus uno (qui numerus est rationum) ducatur ; deindeque Logarithmo primi termini augeatur; Logarithmus erit termini ultimi.

28. Atque hæc de Logarithmorum notitia satis sunto : quibus intellectis, reliquam operationem, exempla sequentia diligenter inspecta, facilem reddent: In qua etiam omnes punctationes, post duas primas, linea separatrice abscindendæ sunt.

Exampl:I. 1qq − 72c + 238600l = 8725815. Justus. Sunto duo prima latera singularia.

		−72	+238600
47.	1,67209|8	1,85733	5,37767
Cu:	5,01629	5,01629	1,67210
QQ:	6,68839	6,87362	7,04977
	+4880	−7475	+11213

Et +4880 + 11213 − 7475 = +8618: minor justo.

48.	1,68124	1	1,85733	5,37767
Cu.	5,04372		5,04372	1,68124
QQ.	6,72496		6,90105	7,05891
	+5308		−7963	+11455

Et +5308+11455−7963 = +8800 : major justo.
Radix igitur vera erit 48−1, hoc est, 47.

Exampl: II. 1c−32571 = −45744. Justus.
Sunto duo prima latera singularia.

			1−32571
48.	1,68124	1	3,51282
Cu.	5,04372		1,68124
	+1106		5,19406
			−1563

+1106−1563 = −457, minor justus.

49.	1,690196	3,51282
Cu.	5,070590	1,69020
	+1176	5,20302
		−1596

+1176−1596 = −420, major justo.
Radix igitur vera erit 49−1, hoc est, 48.

Latus secundum investigari poterit per Logarithmos, etiam Depressione præcedente. Ut in Exemplo V. 1qq −1246,00q = 08972,6256. Hæc quadratice depressa fiet 1q −1246 = Q) 8972,6.

Supponantur duo prima latera singularia,

,8972,6

34. 1,53148 | 3,95337
Q. 3,06296 | 3,06296
+ 1156 | 0,89041: valor 7,77 Justus.

+ 1156—1246 = -90: minor justo.

36. 1,55630 | 3,95337
3,11260 | 3,11260
+ 1296 | 0,84077: valor 6,93 Justus.

+ 1296—1246 = +50: major justo:

Radix igitur vera cadit inter 34 & 36.

Atque hoc modò in XXVIII Sectionibus, sive Præceptis (qui numerus est perfectus) doctrinam de Æquationum adfectarum resolutione in numeris, adjuvante Deo omnium bonorum Datore, expedivi: Ejus igitur sit omnis laus, honor, & gloria in sempiternum. Amen.

Exempla quædam Æquationum Resolutarum in Numeris.

Æquationum Quadraticarum, omniumque in quibus sunt tres species in ordine scalæ æqualiter adscendentes, Analysi supersedebo : quia in Cap: XVI Sect 9. *Clavis*, modus facilior traditus est, quàm per generalem hanc methodum præstari poterit : Et ad Exempla Æquationum aliter adfectarum progrediar. Denique in fine, Notas ad Exempla, subjungam; in quibus operationis ratio, in laterum singularium investigatione, ex præceptis superiùs traditis, aperitur.

Initium faciam à Resolutione numerosæ Æquationis primò constitutæ, Nempe

$$1qc - 15qq + 160c - 1250q + 64801 = 17030478$$

Hoc est, $Lqc - BLqq + CqLc - DcLq + FqqL = Gqc$

Examplu

Exemplum I.

1qc−15qq+160c−1250q+06480l = 170304782.
Hoc est, Lqc−BLqq+CqLc−DcLq+FqqL = Gqc.

170304782	(47
15	—B
1250	—Dc
160	Cq
6480	Fqq
1024	Aqc
10240	CqAc
25920	FqqA
+ 11289920	
3840	—BAqq
20000	—DcAq
− 404000	
7249920	*Ablatis.*
℞ 97805582	
1280	5Aqq
640	10 Ac
160	10Aq
20	5 A
7680	Cq3Aq
1920	Cq3A
160	Cq
6480	Fqq

+142	50040	
38	40	- B4Ac
1	440	- B6Aq
	240	- B4A
	15	- B
1	0000	- Dc2A
	1250	- Dc
-40	87665	
+101	62375	*Divisor.*
896	0	5AqqE
313	60	10AcEq
54	880	10AqEc
4	8020	5AEqq
	16807	Eqc
53	760	Cq3AqE
9	4080	Cq3AEq
	54880	CqEc
	45360	FqqE
+1333	62047	
268	80	- B4AcE
70	560	- B6AqEq
8	2320	- B4AEc
	36015	- BEqq
7	0000	- Dc2AE
	61250	- DcEq
-355	56465	
+978	05582	*Ablatit.*

Ex

1c + 420000 l = 247651713

Hoc est, Lc+CqL=Dc.

	247 | 651 | 713	(417	
	420000	Cq	
	64	Ac	
	1680000	CqA	
	2320000	*Ablatit.*	
Rc	15 | 651 | 713		
	48	3Aq	
	12	3A	
	420000	Cq	
	912000	*Divisor.*	
	48	3AqE	
	12	3AEq	
	1	Ec	
	420000	CqE	
	912100	*Ablatit.*	
Rc	6 | 530 | 713		
	5043	3Aq	4 | 1
	123	3A	16 | 8
	420000	Cq	
	925530	*Divisor.*	| 1
	35301	3AqE	16 | 8 | 1
	6027	3AEq	
	343	Ec	
	2940000	CqE	
	6 | 530 | 713	*Ablatit.*	

Exem-

Exemplum III.

$1c + 1007q = 247617936,$

Hoc est, $Lc + BLq = Dc.$

2 4 7	6 1 7	9 3 6	(417
1 0	0 7		B
6 4			Ac
1 6 1	1 2		BAq
2 2 5	1 2		*Ablatit.*
Rc 2 2	4 9 7	9 3 6	
4	8		3Aq
	1 2		3A
8	0 5 6		B2A
	1 0 0	7	B
1 3	0 7 6	7	*Divisor.*
4	8		3AqE
	1 2		3AEq
	1		Ec
8	0 5 6		B2AE
	1 0 0	7	BEq
1 3	0 7 7	7	*Ablatit.*

R*c*	9	4 2 0	2 3 6	
		5 0 4	3	3Aq
		1	2 3	3A
		8 2 5	7 4	2BA
		1	0 0 7	B
	1	3 3 2	2 7 7	*Divisor.*
	3	5 3 0	1	3AqE
		6 0	2 7	3AEq
			3 4 3	Ec
	5	7 8 0	1 8	B2AE
		4 9	3 4 3	BEq
	9	4 2 0	2 3 6	*Ablatit.*

4	1
16	
	8
	1
16	81

1qq--44299005l = 22252086

Lqq—DcL=Fqq.

0	2 2 2 5	2 0 8 6	(345
--44	2 9 9 0	0 5	—Dc
+81			Aqq
−132	8 9 7 0	1 5	—DcA
−51	8 9 7 0	1 5	*Ablatit*
℞ 5 2	1 1 9 5	3 5 8 6	
10	8		4Ac
	54		6Aq
	12		4A
+ 11	3 5 2		
−4	4 2 9 9	0 0 5	—Dc
+(	9 2 2 0	9 9 5	*Divisor.*
54	0		4AcE
13	5 0		6AqEq
1	5 0 0		4AE
	6 2 5		Eqq
+69	0 6 2 5		
−22	1 4 9 5	0 2 5	—DcE
+ 46	9 1 2 9	9 7 5	*Ablatit.*
℞ 5	2 0 6 5	3 8 3 6	
+ 1	2 7 9 3	7 3 9 5	*Divisor*
+. 5	2 0 6 5	3 8 3 6	*Ablatit.*

1qq-124600q=08972 6256, Lqq-CqLq=Fqq.

08972 6256	(354
-124600	-Cq
+81	Aqq
-112 1400	-CqAq
-311 400	*Ablatit*
R 32 0372 6256	
108	4Ac
54	6Aq
12	4A
+11 352	
7 47600	-Cq2A
1 24600	-Cq
-7 600600	
+3 751400	*Divisor*
540	4AcE
1350	6AqEq
1500	4AEc
625	Eqq
+690625	
3738000	-Cq2AE
3150000	-CqEq
-40495000	
+28567500	*Ablatit*
R 3 4697 6256	
8489 1800	*Divisor*
+ 3 4697 6256	*Ablatit*

Exem-

Exemplum VI.

1qq-340c=621066096

Lqq-BLc=Fqq.

6	2 1 0 6	6 0 9 6	(354
−3	4 0		−B
+8 1			Aqq
−9 1	8 0		BAc
−1 0	8 0		*Ablatis*
R 17	0 1 0 6	6 0 9 6	
10	8		4Ac
	5 4		6Aq
	1 2		4A
+1 1	3 5 2		
9	1 8 0		−B3Aq
	3 0 6 0		−B3A
	3 4	0	−B
−9	4 8 9 4	0	
+1	8 6 2 6	0	*Divisor*
5 4	0		4AcE
1 3	5 0		6AqEq
1	5 0 0		4AEc
	6 2 5		Eqq

+6

+690625		
45900		-B3AqE
76500		-B3AEq
42500		-BEc
-5397500		
+1508750		*Ablatit*
R 1	92316096	
+	469290̇60	Divisor
+1	92316096	*Ablatit*

Exem. VII.

Exemplum VII.

1qq—771080001 = 085530576 Lqq-DcL=Fqq.

0 8 5 5 3 0 5 7 6	(426	
-77 1 0 8 0 0 0	—Dc	
+256	Aqq	
-308432000	—DcA	
-52432000	*Ablatit*	
Rc 532873 0576		4 · 2
256	4Ac	16
96	6Aq	16
16	4A	4
+26576		1764
—77108000	—Dc	
+18865 2000	*Divisor*	
512	4AcE	4 · · 2
384	6AqEq	1
128	4AEc	646 8
16	Eqq	948
+55 1696		74088
—15 42 1 6 000	—DcE	
+39 7 48 0 0 000	*Ablatit*	
Rc 13 5393 0576		
+2 2030 4080	*Divisor*	
+135393 0576	*Ablatit.*	

Exemplum

Exemplum VIII.

3200l — 1c = 46577 *Æquatio est ambigua.*
CqL — Lc = Dc

(47 *Radix major.*

4 6 5 7 7	
3 2 0 0	Cq
-- 6 4	-Ac
+ 1 2 8 0 0	CqA
+ 6 4 0 0	*Ablatit.*
℞ - 1 7 4 2 3	
4 8	-3Aq
1 2	-3A
- 4 9 2	
+ 3 2 0 0	Cq
-- 1 7 2 0	*Divisor.*
3 3 6	-3AqE
5 8 8	-3AEq
3 4 3	-Ec
- 3 9 8 2 3	
+ 2 2 4 0 0	CqE
- 1 7 4 2 3	*Ablatit.*
℞ 0 0 0 0 0	

Exemplum IX.

$$3200l - 1c = 46577$$

(157 *Radix minor.*

4 6	5 7 7		
3 2	0 0	Cq	
−1		Ac	
+3 2	0 0	CqA	
3 1	0 0	*Ablatit.*	
℞ 1 5	5 7 7		
	3	2Aq	
	3	3A	
−	3 3		
+3	2 0 0	Cq	
2	8 7 0	*Divisor.*	
1	5	−3AqE	
	7 5	−3AEq	
	1 2 5	−Ec	
−2	3 7 5		
+1 6	0 0 0	CqE	
1 3	6 2 5	*Ablatit.*	
℞ 1	9 5 2	0 0 0	
	2 5 2	0 5	*Divisor.*
	7 4 5	1 0 7	*Ablatit.*

℞ 6 | 2 0 6 | 8 9 3 | 0 0 0 &c.

53q−1c = 13254 Æquatio est ambigua.
BLq−Lc=Dc

Radix major.

13	2 5 4	(49
5	3	B
−64		-Ac
+84	8	BAq
+20	8	*Ablatit*
℞ −−7	5 4 6	
4	8	-3Aq
	1 2	-3A
−−4	9 2	
4	2 4	B2A
	5 3	B
+4	2 9 3	
−−	6 2 7	*Divisor*
33	6	-3AqE
5	8 8	-3AEq
	3 4 3	-Ec
−−39	8 2 3	
29	6 8	B2AE
2	5 9 5	BEq
+32	2 7 7	
−−7	5 4 6	*Ablatit*
℞ 0	0 0 0	

Exemplum XI.

$$53q - 1c = 13254$$

13254	(20,05	*Radix minor.*
53	B	
−8	-Ac	
212	BAq	
132	*Ablatit*	

Rc	54 000 000	
	−12 0000	−3Aq
	−600	−3A
	−12 006 00	
	21200	B2A
	53	B
	+ 21 2053	
	9 1 9930	*Divisor*
	−6 00000	−3AqE
	−15000	−3AEq
	−125	−Ec
	−601 50125	
	106000	B2AE
	1325	BEq
	+ 106 1325	
	459 823 75	*Ablatit*
Rc	9 017 625 000 &c	

Exemplum XII.

$600341 - 1c = 1023768$

$CqL - Lc = Dc.$

Radix major. 101

10 2	37 6 8	(236	
60 0 34		Cq	
—8		-Ac	
+1 20 0 68		CqA	
+40 0 68		Ablatit.	
R-2 9 8 3	0 3 2		
1 2		-3Aq	
6		-3A	
-1 2 6			
+ 6 0 0	34	Cq	
— 6 5 9	6 6	Divisor.	
36		-3AqE	
5 4		-3AEq	
2 7		-Ec	
-4 1 6 7			
+ 1 8 0 1	0 2	CqE	
-2 3 6 5	9 8	Ablatit.	
R-6 1 7	0 5 2		
-9 6	3 6 6	Divisor.	
6 1 7	0 5 2	Ablatit.	

Exem. XIII.

Exemplum XIII.

600341 − 1c = 1023768

17,135 Radix minor.

1	023768	
	60034	Cq
	−1	−Ac
+	60034	CqA
+	59934	*Ablatit.*
℞	424428	
	3	−3Aq
	3	−3A
	−33	
	+60034	Cq
	59704	*Divisor*
	21	−3AqE
	147	−3AEq
	343	−Ec
	−3913	
+	420238	CqE
+	416325	*Ablatit.*
℞	+810300	
	591619	*Divisor.*
	6016189	*Ablatit.*

R 2	0 8 6	8 1 1	0 0 0		
	5 9 1	5 6 2	5 7		Divisor
1	7 7 5	5 5 6	9 0 3		Ablatit

R	3 1 1	2 5 4	0 9 7	0 0 0	
	5 9	1 5 3	6 3 7	9 1	Divisor.
	2 9 5	7 6 7	1 6 1	6 2 5	Ablatit
R 1 5	4 8 6	9 3 6	3 7 5	0 0 0	&c.

Exemplum XIV.

1qq−72c+2386001 = 87258157056

Lqq−BLc+DcL = Fqq.

8 7 2	5 8 1 5	7 0 5 6	(47,6
−7	2		−B
+2 3 8	6 0 0		Dc
2 5 6			Aqq
9 5 4	4 0 0		DcA
+1 2 1 0	4 0 0		
−4 0 6	8		BAc
+7 4 9	6 0 0		*Ablatit.*

Rc 1 2 2 | 9 8 1 5 | 7 0 5 6

2 5 6 — 4Ac
9 6 — 6Aq
1 6 — 4A
2 3 8 6 0 0 — Dc

+ 5 0 4 3 6 0

3 4 5 6 — -B3Aq
8 6 4 — -B3A
7 2 — -B

- 3 5 4 3 1 2

+ 1 5 0 0 4 8 *Divisor.*

1 7 9 2 — 4AcE
4 7 0 4 — 6AqEq
5 4 8 8 — 4AEc
2 4 0 1 — Eqq
1 6 7 0 2 0 0 — DcE

+ 3 9 8 9 8 8 1

2 4 1 9 2 — -B3AqE
4 2 3 3 6 — -B3AEq
2 4 6 9 6 — -BEc

- 2 8 6 7 2 5 6

1 1 2 2 6 2 5 *Ablatit.*

Rc 1 0 | 7 1 9 0 | 7 0 5 6

1 7 6 9 8 8 0 8 *Divisor.*

1 0 7 1 9 0 7 0 5 6 *Ablatit*

3l-1c = 1,258640782100 CqL-Lc = Dc

1 2 5 8 6 4 0 7 8 2 1 (0,4499
Subtensa
Gr: 26.

3 3 Cq
-6 4 -Ac
+1 2 CqA
1 1 3 6 *Ablatit.*

R 1 2 2 6 4 0
4 8 -3Aq
1 2 -3A
-4 9 2
+3 Cq
2 5 0 8 *Divisor*
1 9 2 -3Aq E
1 9 2 -3AE q
6 4 -Ec
-2 1 1 8 4
+1 2 CqE
9 8 8 1 6 *Ablatit*

R 2 3 8 2 4 7 8 2
2 4 1 7 8 8 *Divisor.*
2 1 6 6 5 1 5 1 *Ablatit.*

R 2 1 5 9 6 3 1 1 0 0
2 3 9 5 0 6 2 3 *Divisor.*
2 1 5 4 5 8 5 5 0 1 *Ablatit.*

R 0 5 0 4 5 5 9 9 0 0 0

1qc-5c+5l == 1,1471528727020902

Lqc-CqLc+FqqL == Gqc.

(0,2437
Subtensa
Gr:14.

1	14715	28727	02092
†	5	Fqq	
	-5	-Cq	
	32	Aqc	
1	0	FqqA	
† 1	00032		
	—40	CqAc	
	96032	*Ablatit.*	
R	18683	28727	
	8	0	5Aqq
		80	10Ac
		40	10Aq
		10	5A
	5		Fqq
	+50088	410	
	60		-Cq3Aq
	30		-Cq3A
		5	-Cq
	—630	5	
	+43783	410	*Divisor.*
	32	0	5AqE
	48	0	10AEq
	2	560	10AqEc
		2560	5AEqq
		1024	Eqc
	20		FqqE
†	29029	62624	

	240		-Cq3Aq	E
	480		-Cq3AE	q
	320		CqEc	
	-29120			
	17127	62624	*Ablatit.*	
Rc	1555	66103	02092	
	414	9122		Divisor.
	1242	65012	09443	*Ablatit.*
Rc	313	01090	92649	00000

Notæ in Exempla præcedentia.

IN Exemplis Sectionum 26 & 28, Numerum Justum voco eum, qui oritur ex adplicatione potestatis Resolvendæ ad gradum lateris suppositi, per quem facta est Depressio. Hæc enim mensura est, cui reliquæ species omnes legitimè aggregatæ, deberent esse æquales. Ut in Exemplo 1° Sectionis 26, 1c + 238,6 — 7,2q = L) 872,5. Si pro latere primo supponatur 5: Oportet esse C:5: + 238,6 — 7,2 Q:5: = 872,5 divisum per 5: hoc est 125 + 238,6 — (7,2 × 25) 180, nempe 183,6 æqualem esse 174,5 Justo. At major est: ideoque latus verum minus est quàm 5. Supponatur igitur iterùm 4: Et periculum fac, an C:4: + 238,6 — 7,2Q:4: æquetur 872,5 diviso per 4.

Cæterùm nè in his Exemplis, sicut etiam in sequentibus, tentamenta hæc casu merè fortuito suscipiantur; Monendum erit.

Primò si lateris eruti homogenea potestas excedat potestatem Resolvendam: vel si magnitudines augentes potestatem Resolvendam, excedant eas quæ imminuunt: Latus A verum minus (ut plurimùm) erit latere eruto: Sin aliter, majus. Ut in hac Æquatione, 1c + 260000 l = 180931713.

Secundò, Si Divisores sub eodem signo cum Reli-

quo

quo poteſtatis Reſolvendæ, excedant eos, qui ſunt ſub ſigno diverſo: Latus E verum (ut plurimum) minus erit quam Quotus: ſin aliter, majus: Ut in hac Æquatione, 15681 — 1c = 2 1 9 5 2. Idem etiam accidit in Æquationibus ambiguis, quando Reliquum poteſtatis Reſolvendæ eſt adfirmativum: ut in hac Æquatione, 67681 — 1c = 214273. Harum trium Æquationum ſolutio in praxi, poſt Notas oſtendetur.

Tertio; ſi poſt hæc Monita, nihilominus ſubſit dubitatio; tentamentum à 5 commodiſſimè erit inchoandum: Atque inde per numeros impares continuanda inquiſitio: ſive ea per Depreſſionem fiat, ſive per Logarithmos.

His præmonitis, reſtat ut Exempla ipſa diſcutiamus.

Ad Exempl: I. √qc1703 eſt 4+, per Sect: 18, Reg: 1. Nam ut ex Sect: 7. adparet, per Coefficientes Analyticè reductos, non fit in primo puncto notabilis immutatio. Quare latus A verum erit 4.

Latus E verum mius eſt quàm Quotus 9: quia Diviſores ſub ſigno + (quod ſignum eſt ipſius R) excedunt eos qui ſunt ſub ſigno —.

Ad Exempl: II. 42) 247 (6—, per Sect: 18, Reg: 2. Nam 42 Analyticè reductus, per Sect: 6 & 8, fit 252: major quàm 247. Eſtque Latus A verum minus quàm 6; quia C: 6—: excedit 247. 6.

Ad Exempl: III. 10) 247 (24+Q: 5—: per Sect: 18, Reg: 2.

Ad

Ad Exempl: IV. √c44,3 eſt 3 +, per Sect: 18, Reg:3. Quare latus A verum eſt 3.

Latus E verum minus eſt quàm Quotus 8 —, per Monit:2.

Ad Exempl: V. √q12,4 eſt 3 +, per Sect: 18, Reg:3. Quare latus A verum eſt 3.

Latus E verum minus eſt quàm Quotus 9 -, per Monit:2.

Ad Exempl: VI. Coefficiens lateralis 3,4 Quadrato-quadraticè multiplicatus, & auctus 6,2, fit 140, QQ:3 +: per Sect: 18, Reg: 4. Quare latus A verũ eſt 3.

Latus E verum minus eſt quam Quotus 9 —, per Monit:2.

Ad Exempl: VII. √c 77 eſt 4, per Sect: 18, Reg:3. Quare latus A verum eſt 4.

Ad Exempl: VIII. √q32 eſt 5,65, in 32 fit 180,8 mi 46,5, reſtat 144, C:5: per Sect:18, Reg:4. At 144 excedit 46,5. Quare Latus A verum minus eſt quàm 5, per Monit:1.

Latus E verum minus eſt quam Quotus 10, per Monit: 2.

Ad Exempl: IX, XI, XIII. Solutio facillima eſt per Diviſionem, juxta Sect: 18, Reg:3.

Ad Exempl: X. C:5: eſt 125, mi 13, reſtat 112, C:5—: per Sect:18, Reg:4, At 112 excedit 13. Quare latus A verum minus eſt quam 5, per Monit: 1.

Latus E verum minus eſt quàm Quotus 12, per Monit: 2.

Ad

Ad Exempl:XII. √q6 eſt 2 +, in 6 fit 12, mi 1, reſtat 11, C:25 per Sect: 18, Reg:4. At 11 excedit 1. Quare latus A verum paulò minus quam 2 +, per Monit. 1.

Latus E verum minus eſt quàm Quotus 5 –, per Monit: 2.

Ad Exempl : XIV. QQ:7,2: eſt — 2687. Et √c238,6 eſt 6,2, cujus QQ eſt + 1480. Tum — 2687 + 1480 = — 1207 : Hic additus ad 872, dat 2079, QQ:6 + : per Sect:18, Reg:4. Et quia adjectitius — 2687 major eſt quam ablatitius + 1480, erit latus A verum minus quàm 6, per Monit: 1.

Latus E verum minus eſt quam Quotus 9, per Monit: 2.

Ad Exempl: XV, XVI, Quia in utroque Æquationis ambiguæ Radix minor quæritur, nec obſtant Coefficientes etiam reducti, Analyſis per Divis: fiet, juxta Sect: 18, Reg: 1.

Praxis Exempli in Monito primo.

1c + 26,0000 = 18093 1713.

1809 (4, latus A

26,0 Cq.

√q26 eſt 5, in 26 fit 130, tollatur ex 180, reſtat 50, C:3 +: qui minor eſt quam 180. Quare latus A verum majus eſt quàm 3.

Praxis

Praxis Exempli in Monito secundo.

15681 − 1C = 21952

21952	(28, Duo prima latera.
1568	Cq
− 8	Ac
+ 3163	CqA
+ 2336	*Ablat.*
Rc − 1408	
12	− 3Aq
6	− 3A
− 126	
+ 1568	Cq
+ 308	*Divisor*

Signum Rc est −. At − 1,26 minor est quam + 1,568. Quare latus E verum majus est quam Quotus 4.

Praxis

Praxis Exempli posterioris in Monito secundo.

$67681 - 1c = 214273$

21 4 2 7 3	(47,	Duo prima latera.
6 7 6 8	Cq	
−6 4	−Ac	
+270 7 2	CqA	
+206 7 2	*Ablat*	
R +7 5 5 3		
4 8	−3Aq	
1 2	−3A	
−4 9 2		
+6 7 6 8	Cq	
+1 8 4 8	*Divisor.*	

Signum R est +. At Divisor ex A lateris gradibus negativus, minor est Divisore Coefficiente adfirmativo; hoc est −4,92 minor est quam +6,768. Quare latus E verum majus erit quam Quotus 4.

In Sectione XXVII. Logarithmorum doctrinam paucis tradidi: Sed satis luculentèr praesertim pro tribus prioribus Numerationis speciebus, scilicet Additione, Subductione, & Multiplicatione.

Operatio

Operatio quidem in Addendo & Subtrahendo, si Indices sint adfirmativi, à communi integrorum viâ nihil differt: parum etiam si sint negativi, ut ex his Exemplis apparet,

Inventio fractionum	$\frac{13}{17}$	$1,11394$ / $1,23045$	Et $\frac{15}{32}$	$1,17609$ / $1,50515$
	Log:	$\bar{1},88349$	Log:	$\bar{1},67194$

Additio.		Subductio.	
Ad	$\bar{1},88349$	Ex	$\bar{1},88349$
adde	$\bar{1},67194$	tolle	$\bar{1},67194$
Sum	$\bar{1},55543$	Rest	$0,21155$

Multiplicatio.

Lateris	$0,0064$	Lateris	$0,0064$
$3 \times$	$\bar{3},80614$	$2 \times$	$\bar{3},80614$
Cubus	$\bar{7},41842$	Quadr:	$\bar{5},61228$

Divisionis Logarithmi Indicem habentis negativum, per 2,3,4,5, &c. difficultas constat in investigatione Indicis Quoti. Cui rei hæc inservit Tabella.

Divisores.							
	2)	1	2				1
		3	4				2
		5	6				3
		7	8				4
	3)	1	2	3			1
&c		4	5	6			2
		7	8	9			3
	4)	1	2	3	4		1
		5	6	7	8		2
	5)	1	2	3	4	5	1
		6	7	8	9	10	2
		40	30	20	10	0	

In hac Tabella Divisores sunt à sinistrâ, intra lineam flexam.

Tum versùs dextram sequuntur Logarithmorum dividendorum Indices negativi.

His in singulis ordinibus collaterales adstant Quotorum Indices etiam negativi.

Subtùs autem qui scribuntur numeri, 0, 10, 20, 30, 40, Ostendunt numeros addendos primæ figuræ Logarithmi dividendi, cujus Index negativus invenitur supra in eâdem columnâ, juxta Divisorem. Ut si Logarithmus

garithmus $\bar{7}$, 41842 postuletur dividi per 3: Quæratur $\bar{7}$ juxta 3) dabiturque collateralis $\bar{3}$, pro Indice Quoti: Et numerus 20 subtùs; qui additus figuræ dividuæ primæ 4, reddit ipsum 24: in quo Divisor 3 Octiès continetur.

Divisio.

3) $\bar{7}$, 41842	2) $\bar{5}$, 61228
Latus $\bar{3}$, 80614	Latus $\bar{3}$, 80614

De Anatocismo, sive Usura composita.

Hoc est, Sex Theorematum fundamentalium, quibus Quæstiones omnes circa Anatocismum, facili negotio, solvi poterunt, investigatio Analytica.

Notandum autem est, quod Solidus Anglicus continet 12 Denarios : Et Libra sive Mina continet 20 Solidos; Denarios verò 240.

1. RAtio fœnoris reducenda primò est ad Rationem æqualem, cujus antecedens sit 100, vel 1. Ut si Ratio sit Denariorum 19|2, vel Solidorum 1|6, pro 1 Libra : Dic, 240. 259|2, vel 20. 21|6::100. 108::1.1|08: nempe $\alpha . \beta$. Quare β procreatur ex sorte α, in uno anno integro.

2. Si vero Solutio sit per semissem anni, vel per Quadrantem, hoc est per Dies 182|5, vel per Dies 91|25 : Pro β, multiplicetur Logarithmus Procreat; annui per $\frac{1}{2}$, vel per $\frac{1}{4}$: Sive & per $\frac{182|5}{365}$, vel per $\frac{91|25}{365}$

Perperam enim vulgò sumitur $\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{4}$ annui fœnoris.

3. Quia in progressione, numerus Rationum unitate minor est, quàm N numerus terminorum, sive

Solutionum; erit numerus Rationum N−1. Item Logarithmus β ductus in N−1, erit Logarithmus ω ultimi termini. Denique Logarithmus β ductus in N, erit Logarithmus $\beta\omega$, hoc est, ipsius β multiplicati in se continuè pro numero Solutionum.

4. Quare $\beta\omega$ procreatur ex α sorte, sive 1 ^{lb}, elocata pro N vicibus. Hinc Duo oriuntur Theoremata.

Theo: I. 1^{lb}. $\beta\omega$ :: Q^{lb}. Q^{lb} cum lucro in N vicibus.

Theo: II. $\beta\omega$: 1^{lb} :: Q^{lb} post N vices. valor præsens.

5. Deinde quia $\frac{\beta\omega - \alpha q}{\beta - \alpha}$, hoc est, $\frac{\beta\omega - 1}{\beta - 1} = Z$, summa omnium terminorum Progressionis (quorum ultimus est ω) estque idcirco Procreatum ex Pensione 1^{lb} intermissa pro N vicibus: Hinc Duo oriuntur alia Theoremata.

Theo: III. $\beta - 1$. $\beta\omega - 1$ :: Q^{lb} Pensio intermissa pro N vicibus. Pensiones cum fœnore solvendæ in fine.

Theo: IV. $\beta\omega - 1$. $\beta - 1$ :: Q^{lb} futura. Pensio æquivalens solvenda in N vicibus.

6. Denique quia $\beta\omega$ procreatur ex 1^{lb} elocata pro N vicibus: Estque $\frac{\beta\omega - 1}{\beta - 1}$ procreatum ex Pensione 1^{lb} intermissa pro N vicibus; quod in pecuniis numerat[illegible] æquivalet pretio Pensionis: Dic, $\beta\omega$. 1^{lb} :: $\frac{\beta\omega - 1}{\beta - 1}$ $\frac{\beta\omega - 1}{\beta - 1 \text{ in } \beta\omega}$: Unde igitur in N vicibus procreabitur $\frac{\beta\omega[illegible]}{\beta[illegible]}$

Pretium

Pretium Pensionis. Hinc etiam oriuntur duo Theoremata.

Theo: V. $\beta-1$ in $\beta\omega.\beta\omega-1::Q^{lb}$ Pensio pro N vicibus. Pretium ejusdem in pecuniis numeratis.

Theo: VI. $\beta\omega-1.\beta-1$ in $\beta\omega::Q^{lb}$ præsens. Pensio emenda pro N vicibus.

Nota quod Q^{lb} significat quantamlibet librarum summam.

Exemplum de Pensione durante 10 annos, solutione semestri; in Ratione 1 ad 1,08; Estque N 20.

Et Logar: 1,08 est 0,03342.

0,03342 in $\frac{1}{2}$

0,01671 Log: $\beta=1,0396$

20 N

0,33420 Log: $\beta\omega=2,159$

$\bar{1}$,59769 Log: $\beta-1=0,0396$

$\bar{1}$,93190 Log: $\beta-1$ in $\beta\omega$

0,06408 Log: $\beta\omega-1=1,159$

Est igitur,

0,06408

$\bar{1}$,93190

1,13218 Logar: pretii 13,56^{lb} pro Pens: 1^{lb}.

$\bar{1}$,93190

0,06408

$\bar{1}$,86782 Logar: Pensionis 0,07376^{lb} pro Pret: 1^{lb}.

Logarithmis hisce inventis adde Logar: $Q^{'b}$.
Vel valores hosce inventos multiplica per $Q^{'b}$.

REGULA FALSÆ POSITIONIS.

Multiplica Positiones per alternos errores. Et si errores sint ejusdem generis, nempe uterque excedens, vel uterque deficiens; Differentiam productorum divide per Differentiam errorum; Si verò diversi sint generis; Summam productorum divide per Summam errorum: Et Quotus dabit numerum quæsitum.

Demonstrationis gratia. Quis numerus est, qui ductus in B, producit planum BA, nempe BApl.

Esto A-C	Esto A-D.
in B. BA-BC	in B. BA-BD

Errores igitur sunt

BApl-BA+BC.	BApl-BA+BD.

Quia utrobique signa sunt similia; ut quæ æqualia sunt, expurgentur; opus est ut Subductio fiat, mutando omnia signa minoris. Nam sic æqualibus se mutuò elidentibus, manebit errorum Differentia, BC-BD.

BC defic:	BD defic:
A-D	A-C
BCA-BCD	BDA-BDC

Hic etiam æqualibus utrinque per Subductionem expunctis; Reductio fit ad BCA-BDA: quæ est ipsa errorum differentia ducta in A.

$$\text{Quare } \frac{BCA-BDA}{BC-BD} = A.$$

Iterum	Esto A+C.	Esto A-D
	in B, BA+BC	in B. BA-BD

Errores igitur sunt.

BA+BC-BA pl. BA pl-BA+BD.

Quia utrobique signa sunt contraria; æqualia per Additionem, absque ulla signorum mutatione, se mutuò elident: Et sic manebit errorum summa, BC+BD.

BC exced:	BD defic:
A-D	A+C
BCA-BCD	BDA+BCD.

Hîc etiam æqualibus utrinque per Additionem expunctis; Reductio fit ad BCA+BDA: quæ est ipsa errorum summa ducta in A.

$$\text{Quare } \frac{BCA+BDA}{BC+BD} = A.$$

Notæ seu symbola quibus in sequentibus utor:

Æquale $=$. Simile *Sim.*
Majus $\sqsubset$. Proximè majus $\sqsubset\!\!\!\sqsubset$.
Minus $\sqsupset$. Proximè minus $\sqsupset\!\!\!\sqsupset$.
Non majus $\not\sqsubset$. Æquale vel minus $\sqsubseteq$.
Non minus $\not\sqsupset$. Æquale vel majus $\sqsupseteq$.
Proportio, sive ratio æqualis $::$
Major ratio $\ddot{\div}$. Minor ratio $\dot{\div}$.
Continuè proportionales $\div\!\!\div$.
Commensurabilia $\sqcap\!\!\vdash$.
Incommensurabilia $\sqcap\!\!\dashv$.
Commensurabilia potentiâ $\sqcap\!\!\!\vdash$.
Incommensurabilia potentiâ $\sqcap\!\!\!\dashv$.
Rationale, ῥητὸν, R, vel $\ulcorner$.
Irrationale, ἄλογον, $\urcorner$.
Medium sive mediale $m\ulcorner$

Linea secta secundum extremam & mediam rationem $\Big\}$ σ s

Major ejus portio σ
Minor ejus portio τ.

Z est A + E. ζ est a + e.
Z est Aq+Eq. ζ est aq + eq. ζ
X est Aq−Eq. ξ est aq−eq. ξ
Æ est A E rectang. æ est a e rectangulum.
▯ rectangulum. □ quadratum.
△ Triang: ℞ latus.
media proportionalis, ⫶.

ELEMENTI DECIMI
EUCLIDIS

Declaratio.

AD def: 1. Eandem mensuram duas magnitudines metiri, tum dicit, quando ipsarum quoti mensuras certas, & veris numeris explicabiles habent. Commensurabiles igitur magnitudines sunt, quarum ratio in veris numeris dari poterit : quales sunt in genere quadratico, radices quadratæ planorum similium : & in genere cubico, radices cubicæ solidorum similium. Exempli gratiâ, in planis 18 & 50, nempe 3×6, & 5×10, similibus (est enim 3.6::5.10) √q 18, & √q50 sunt latera commensurabilia ; quia divisi √q2 maximam utriusque communem mensuram, dant √q 9 & √q 25, hoc est 3 & 5. Sunt igitur √q 18 & √q 50 in ratione 3 ad 5.

Ad def: 2. √q 12 & √q 64 sunt latera incommensurabilia : nam quamvis ad minores terminos poterint reduci per √q 4 maximam utriusque commu-

nem

nem menſuram; fientque √q3 & √q18: non tamen dicuntur commenſurabilia; quia non ſunt ut numerus ad numerum. Eſt enim √q3 numerus non verus, ſed ſurdus.

Ad def: 3. At vero linearum ſive laterum √q12 & √q64, quadrata 12 & 64 ſunt commenſurabilia; quia area 1 utrumque metitur: nam area 12, aream 1 continet duodecies; & area 64, ipſam aream 1, continet ſexagies & quater. Quare quadrata illorum laterum ſunt in ratione 12 ad 64. Atque hinc ſequitur quod omne latus ſurdum generis quadratici numero rationali, ſive vero cuicunque potentiâ eſt commenſurabile: modo ſi intelligantur ejuſdem eſſe generis ſive dimenſionis: At ſi unum ex iis intelligatur eſſe latus ſive linea, & alterum planum ſive ſuperficies, non erunt commenſurabilia potentiâ.

Ad def: 4. Sunt igitur lineæ potentiâ incommenſurabiles diverſorum generum: nempe una lateralis, altera quadratica; vel una quadratica, altera quadrato-quadratica. Exempli gratia, laterum √q3 & √q2 quadrata ſunt 3 & 2: & inter ipſa planum medium proportionale √q6. Quare plana ſive potentiæ 3 & 2 incommenſurabilia ſunt ad planum √q6. Ideoque ipſorum latera √q3 & √q2 ad √qq6 ſunt incommenſurabilia etiam potentiâ.

√q3.		√q2.
3.	√q6.	2.
√q3.	√qq6.	√q2.

Atque hujuſmodi media proportionalia tum plana, tum latera, Euclides poſtea Media ſive Medialia nuncupat.

Ad

Ad def. 5. Si linea proposita vero numero sit explicabilis; omnes lineæ veris numeris explicabiles, sunt ipsi commensurabiles. Si verò linea proposita sit latus surdum, puta $\sqrt{q}\,3$, linea illi quacunque ratione commensurabilis invenitur per proportionem. Ut si ratio data sit 2 ad 5: Dic $2.5 :: \sqrt{q}\,3 . \sqrt{q}\,\frac{75}{4}$.

Dicitur *ῥητὴ*, sive rationalis linea vero numero explicabilis; ratione cujus aliæ lineæ ad ipsam comparatæ, considerantur vel commensurabiles vel incommensurabiles, idque longitudine vel potentiâ.

Atque his bene perspectis, reliquæ definitiones nihil habebunt difficultatis.

Sequuntur Lemmata.

1. Rectangulum sub ῥ & ῥ est ῥ. Nam irrationalium aggregatio quantacunque non mutat speciem.

Si linea Z secetur inæqualiter in A & E, erit Z − 2AE = Xq. Et Z + 2AE = Zq.

3. Si lineæ Z componatur tum ex A+E, tum ex a+e: erit Z − ζ = 2æ − 2Æ.

Item, si linea X constituatur tum ex A−E, tum ex a−e: erit Z − ζ = 2Æ − 2æ.

4. A.E :: Aq.Æ :: Æ.Eq.

5. Si A & E sint ⊓: erunt 1°, Aq, Eq, Z, X ⊓: ideoque simul ῥ vel μῥ.

Erunt 2°, Aq, Eq, Z, X ⊓ 2Æ. per 4.

Erunt 3°, Z, 2Æ, Zq, Xq ⊓.

Erunt 4°, X, 2Æ, Zq, Xq ⊓. Nam Zq =

$Z+2Æ$: & $Xq=Z-2Æ$. & $Zq=4Æ+Xq$.

6. Si A & E ꟷ⊐ꟷ, erunt Aq, Eq Zq, Æ, Z, X, Xq ⊐⊏.

Propositiones Elementi X^i.

9. Novem priores propositiones docent lineas commensurabiles esse, ut numerus ad numerum, atque ideo eorum quadrata esse, ut quadratus numerus ad quadratum numerum. In incommensurabilibus autem contra esse. Earum enim quadrata non sunt ut Q.Q. $\sqrt{q}\,45$ & $\sqrt{q}\,20$ sunt lineæ commensurabiles, quia ipsarum quadrata 45 & 20 sunt ut 9 & 4, numeri quadrati, quorum radices sunt 3 & 2, sunt igitur $\sqrt{q}\,45$ & $\sqrt{q}\,20$ in ratione 3 ad 2.

Coroll: ad 9. Lineæ ⊐⊏ sunt etiam ꟷ⊐ꟷ : at non contra. Sed lineæ 'ꟷ⊐ꟷ non sunt idcirco 'ꟷ⊐ꟷ.

10. Si sit B.C::D.F. sintque B, C ⊐⊏ vel '⊐⊏: etiam D, F ⊐⊏ vel '⊐⊏ erunt.

12. 14. Si B ⊐⊏ C, & C, D ⊐⊏ vel '⊐⊏, etiam B, D ⊐⊏ vel '⊐⊏ erunt.

13. Si B ⊐⊏ D; & C '⊐⊏ D: erit B '⊐⊏ C.

Coroll: ad 14. Si B '⊐⊏ C; at B ⊐⊏ D, & C ⊐⊏ F: erit D '⊐⊏ F.

16. 17. A, E, Z sunt simul ⊐⊏ vel '⊐⊏.

11. Invenire B, D '⊐⊏ : & B, C ꟷ⊐ꟷ. Sumantur duo aliqui numeri 3 & 2, qui non sint ut Q.Q. fiatque 3.2::B.F: Item B.D::D.F. Quare B.F::Bq.Dq. At B, F non sunt Q.Q: ideoque nec Bq.Dq sunt ut Q.Q. Ergo B, D '⊐⊏ per 9.

Iterum

Iterum fiat B.C::C.D: sunt igitur Bq, Cq ⊔⊓ : quare B, C ⊔⊓. √q 3. √qq 6. √q 2.

Coroll: ad 11. *m* inter duas ⊔⊓, est utrivis ipsarum ⊔⊓; & *r*, si alterutra ex iis sit *r*.

15. Si sit A.E:: a.e. & sit A ⊔⊓ √q: Aq - Eq; scil: X: erit etiam a ⊔⊓ √q: aq - eq, scil: ☌. Nam Aq. Eq::aq. eq : quare Aq. Aq-Eq::aq. a-eq. Ergo per 20.

18. 19. Si sint duæ lineæ A & E : adplicetur autem ad A rectangulum æquale quadrato semissis E, deficiens figura quadrata : hoc est, dividatur A in duas partes A-I & I, sic ut ▭^m segmentorum æquetur ☐ $\frac{1}{2}$E; nempe AI-Iq = $\frac{1}{4}$Eq. Et sint segmenta A-I & I ⊔⊓, erit etiam A ⊔⊓ √q: Aq - Eq. & Converse: & contra. Nam per 47 e 1, $\frac{1}{4}$Aq - $\frac{1}{4}$Eq = Q $\frac{1}{2}$ A-I: quare √q: Aq-Eq: est A-2I. At per 16 & hypoth: A-2I, & A sunt ⊔⊓.

22. 23. Ex A, E *r* ⊔⊓ fit Æ *r*, scil: *mr*: & √q Æ, est *r* & *mr*, (vide annotata ad def. 4). Nam A.E::Aq.Æ quare Æ ⊔⊓ Aq *r*, erit *r*. Est etiam Æ *mr*. Nam si A sit √q 3, & E √q 2; erit Æ √q 6 planum, cujus radix est √qq 6. At vero tum quadrata 3, √q 6, 2; tum ipsorum radices √q 3, √qq 6, √q 2 sunt ∺. & in neutris medius terminus est ejusdem rationis sive commensurationis cum suis extremis, sed utrique incommensurabilis.

24. Si

24. Si B ſit ⊓̸ ſaltem ipſi C mɼ, erit etiam B mɼ. Nam ad expoſitam R per 23, fiat RD = Cq mɼ, & RF = Bq. Quare RD ⊓ RF : ideoque FD ɼ⊓. Eſt autem per 22, R ⊓ D : idcirco etiam R ⊓ F. Ergo Bq mɼ : atque ipſa B mɼ.

20.21.25. Ex A, E ɼ⊓, fit Æ ſimiliter ɼ : & converſe. Et ex A, E mɼ⊓, fit Æ mɼ : & converſe. Nam A.E :: Aq.Æ. At Aq eſt ɼ vel mɼ. ergo & Æ ſimiliter ɼ vel mɼ, per 24.

26. Ex A, E mɼ⊓̸, fit Æ ɼ vel mɼ. Nam ad expoſitam R, fiat RB = Aq : & RC = Æ : & RD = Eq. Sunt igitur B:D ɼ⊓, per 23. Et quia C eſt m :: inter B & D; erit Cq ɼ ideoque & ipſa C ɼ. Si igitur C ɼ⊓ R, erit Æ ɼ. Si vero C ɼ⊓ R, erit & Æ mɼ.

27. Si ▯▯^m B mɼ conſtet ex ▯^o C mɼ, & ▯ D : erit etiam ▯^m D ɼ. At non converſe. Nam aliter fingatur ▯ D ɼ. Ad expoſitam R fiat RA = ▯^m C mɼ ; & RE = ▯^m D; & RZ = ▯ B mɼ. Erit igitur Z ɼ⊓ R : & A ɼ⊓ R : & E ɼ⊓ R. Quare A, E ɼ⊓. Eſtque Z ɼ. At Z ⊓ Zq. Eſt igitur Zq ɼ, & Z ɼ : quod oſtenſum eſt falſum. Ergo.

28. Invenire duas A, E mɼ⊓̸, ita ut Æ ſit ɼ. Sumantur B, C ɼ⊓̸ : fiatque B.A :: A.C :: C.E. Dico I^o, A, E mɼ : Nam Aq = BC mɼ, per 22. Dico II^o, A, E mɼ⊓̸ : Nam B.C :: A.E. Quare per 24. Dico III^o Æ ɼ : Nam AE = Cq ɼ.

29. Invenire duas AE mɼ⊓̸, ita ut Æ ſit mɼ. Sumantur B, C, D ɼ⊓̸ : fiatque B.E :: E.D :: A.C. Dico

I^o,

I°, A, E mr: Nam Eq = BD mr. Dico II°, AE mr ⊐. Nam D. C :: E. A. Dico III°, Æ mr: Nam AE = BC mr.

Exemplum pro 28. B 2. C √q3. A √qq 12. E √qq $\frac{27}{4}$. A E 3.

Exemplum pro 29. B √q5. C 2. D √q3. E √qq15. A √qq $\frac{20}{3}$. AE √20.

30. Invenire duas A, E ir ⊐, ita ut A ⊓ sit √qX. Sumantur duo numeri quadrati aq, eq; ita ut aq − eq non sit Q. Tum expositâ A ir, fiat aq. aq − eq :: Aq. Eq. Erit igitur etiam aq. eq :: Aq. X, per 19 e 5.

Dico I°, A, E ir ⊐: Nam Aq, Eq non sunt ut Q. Q.

Dico II°, A ⊐ √q X: Nam sunt ut Q. Q.

Exemplum pro 30. Aq & aq sunt 9. eq & X, 4.

31. Invenire duas A, E ir ⊐, ita ut A ⊓ √qX. Sumantur duo numeri aq, eq, quadrati; ita ut aq + eq non sit Q. Tum exposita A ir, fiat aq + eq. aq :: Aq. Eq. Erit igitur aq + eq. eq :: Aq. X, per 19 e 5.

Dico I°, A, E ir ⊐: Nam Aq, Eq non sunt ut Q. Q.

Dico II°, A ⊓ √qX: Nam Aq, X, non sunt ut Q. Q.

Exemplum pro 31 aq & eq 4. eq & X, 1.

32. Invenire duas A, E mr ⊐, ita ut Æ sit ir; & A ⊓ √qX. Summantur per 30, duas a, e ir ⊐, ita ut a ⊓ √q: aq − eq. fiatque a. A :: A. e :: e. E. Dico I°, A, E mr ⊐, per 22 & 24. Nam Aq = ae mr: & a. e :: A. E, ⊐. Dico II°, Æ ir: Nam AE = Eq ir. Dico III°, A ⊓ √qX, per 15. Nam a ⊓ √q: aq − eq. Exemplum

plum a 2. e $\sqrt{q}$3. A $\sqrt{qq}$ 12. E $\sqrt{qq}$ $\frac{27}{4}$.

Quod si per 31, Sumerentur a e w⌐ꟼ; ita ut a ⊓ $\sqrt{q}$: aq-eq: Inventæ fuerint A, E m⌐ꟼ, ita ut Æ sit w; & A ⊓ $\sqrt{q}$X.

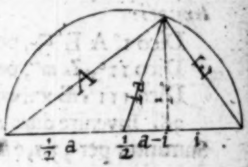
Exemplum a $\sqrt{q}$5. e 2. A $\sqrt{q}$ 20. E $\sqrt{q}$ $\frac{4}{5}$.

33. Invenire duas A, E m⌐ꟼ, ita ut Æ sit m; & A ⊓ $\sqrt{q}$X. Sumantur per 30, duæ a, e w⌐ꟼ; ita ut a ⊓ sit aq-eq: & sumantur i w⌐ꟼ utrique a e: fiatque a.A::A.i::e.E. Dico I°, A, E m⌐ꟼ: Nam Aq = a i m: Estque a.e::A.E. Dico II° Æ m. Nam AE = i e m. Dico III°, A ⊓ $\sqrt{q}$X: Nam a ⊓ $\sqrt{q}$ aq-eq: quare per 15.

Exemplum a 2. e $\sqrt{q}$5. i $\sqrt{q}$ 2. A $\sqrt{qq}$8. E $\sqrt{qq}$ $\frac{5}{2}$.
Quod si per 31, sumerentur a, e w⌐ꟼ, ita ut a ⊓ $\sqrt{q}$: aq-eq: Inventæ fuerint A, E m⌐ꟼ, ita ut Æ sit m: & A ⊓ $\sqrt{q}$X.

Exemplum, a $\sqrt{q}$5. e $\sqrt{q}$2. A $\sqrt{qq}$ 20. E $\sqrt{qq}$ $\frac{1}{5}$.
Præparatio ad propositiones 34, 35, 36, demonstrandas in tribus lemmatibus.

Lemma primum. Si ad a adplicetur rectangulum æquale Q. $\frac{1}{2}$e, deficiens figura quadratâ: divisâ scil: a in a-i & i; ita ut a-i. $\frac{1}{2}$e::$\frac{1}{2}$ e.i. Erit $\frac{1}{2}$a-i = $\sqrt{u}$: $\frac{1}{4}$ aq-$\frac{1}{4}$ eq: sicut in schemate adparet, Atque per hanc interpretationem, a-i = $\frac{1}{2}$a + $\sqrt{u}$: $\frac{1}{4}$aq-$\frac{1}{4}$eq & i = $\frac{1}{2}$a - $\sqrt{u}$: $\frac{1}{4}$aq-$\frac{1}{4}$eq. Et quia Aq = Q: a -i: + $\frac{1}{4}$eq. & Eq = iq + $\frac{1}{4}$eq. Nempe Q. $\frac{1}{2}$ a ± $\sqrt{u}$: $\frac{1}{4}$aq - $\frac{1}{4}$



eq:

eq:+$\frac{1}{4}$eq. Hac adhibita interpretatione.

Erit A = √u: $\frac{1}{2}$ aq + √u: $\frac{1}{4}$aqq—$\frac{1}{4}$aqeq.

Et E = √u: $\frac{1}{2}$ aq -- √u: $\frac{1}{4}$aqq--$\frac{1}{4}$aqeq.

Nam in quadratione lineæ $\frac{1}{2}$ a + √u: $\frac{1}{4}$aq — $\frac{1}{4}$eq. Z est $\frac{1}{4}$aq+$\frac{1}{4}$aq—$\frac{1}{4}$Eq. Et Æ est √u: $\frac{1}{16}$ aqq—$\frac{1}{16}$aqeq: quod duplicatum fiet √u: $\frac{1}{4}$aqq—$\frac{1}{4}$aqeq. huic si adjungatur +$\frac{1}{4}$ eq; abolebitur alterum -- $\frac{1}{4}$ eq.

Lemma secundum: a--i.i::Aq.Eq, ⊐.

Nam a.A::A.a--i } Quare { a.a--i::aq. Aq.
Et a. E::E. i } Quare { a. i::aq.Eq.

Lemma tertium: a.A::E. $\frac{1}{2}$e.

34. Invenire duas A,E ℸ, ita ut Z sit ɤ, & Æ mr. Sumantur per 31, a,e ɤ ℸ, ita ut a ⊐ √q: aq—eq: & ex ipsis inveniantur A,E, Sicut in *Lem.pri.*

Dico I° A,E ℸ: Nam per *Lem.sec:* Aq,Eq ⊐.

Dico II° Z ɤ: Nam in 31, A,E (quibus hic respondent a,e) sunt ɤ ℸ.

Dico III°, Æ mr. Nam per *Lem. tert:* AE = $\frac{1}{2}$ a e mr.

35. Invenire duas A,E ℸ, ita ut Z sit mr, & Æ ɤ. Sumantur per 32, a, e mr ℸ, ita ut æ sit ɤ, et a ⊐ √q: aq--eq: Et ex ipsis inveniantur A, E, sicut in *lem:pri:*

Dico I° A E ℸ, per *lem:secun.*

Dico II°, Z mr, per 32.

Dico III°, Æ ɤ: Nam per *lem:tert:* AE = $\frac{1}{2}$ a e ɤ.

36. Invenire duas A, E ℸ, ita ut Z et Æ sint mr. Sumantur per 33, a, e mr ℸ, ita ut æ mr, et a ⊐ √q: aq—eq.

Dico

Dico I°, A, E ⴗ, per lem: sec.
Dico II° Z mr, per 33.
Dico III°, Æ mr: per lem: tert. consulatur etiam Schema.

Coroll: ad 36: Hine inveniri possunt duæ lineæ mr ⊐, scil: √qZ, & √qÆ.

Principium Senariorum per Compositionem.

37. Si sumantur a, e ɤr ⴗ; tota a + e hoc est ȥ, erit ɤr; vocaturque *Binomium*, scil: ℞ *Bin:* I. Nam per lemma 5, ȥq ⊐ $ȥ_1$ ɤr.

2 + √q3. Cujus Q: est 7 + √q48.

28. Si sumantur a, e mr ⴗ (per 28) ita ut æ sit ɤr; tota ȥ erit ɤr; vocaturque *Bimediale* prius, scil: ℞ *Bin:* II. Nam per lemma 5, ȥq ⊐ æ ɤr.

√qq 12 + √qq $\frac{3}{4}$. Cujus Q: est √q $\frac{147}{4}$ + 6.

39. Si (per 29) sumantur a, e mr ⴗ, ita ut æ sit mr: tota ȥ erit ɤr; vocaturque *Bimediale* posterius, scil: ℞ *Bin:* III. Nam ȥq, hoc est $ȥ_1$ + 2 æ, est ɤr. Nam expositâ R, fiat RT = ȥq; & RP = $ȥ_1$ mr, per 16 & 14: Erit RT-RP = 2 æ. Sunt autem per lem: 5, RP & RT-RP mr ⴗ: Quare P, T-P ɤr ⴗ ad R. Et per 37, T est ɤr. Et per lem: 1, RT hoc est ȥq ɤr.

√qq $\frac{20}{3}$ + √qq 15. Cujus Q: est √q $\frac{145}{3}$ + √q 80.

40. Si (per 34) sumantur a, e ⊐, ita ut $ȥ_1$ sit ɤr; & æ mr; tota ȥ erit ɤr; vocaturque Major, scil: ℞ *Bin:* IV. Nam per lem: 6, ȥq ⊐ $ȥ_1$ ɤr. √u: $\frac{5}{2}$ + √q $\frac{5}{4}$: pl: √u: $\frac{5}{2}$ - √$\frac{5}{4}$. Q: est 5 + √q 20.

41. Si (per 35) sumantur a, e ⴗ, ita ut $ȥ_1$ sit mr,

& æ ɤ; tota ℨ erit ɤ, vocaturque *Potens rationale & mediale*, scil: ℨ *Bin:* V. Nam per lem: 6, ℨq ⊓ æ ɤ.
√u:√q5 + 1: pl: √u:√q5 − 1. Q: est √q20 + 4.

42. Si (per 36) a, e ⊤ɤ, ita ut ℨ & æ sint mɤ; tota ℨ erit ɤ, vocaturque *Potens duo medialia*. Scil. ℨ *Bin:* VI. Nam ℨq, hoc est ℨ + 2æ est ɤ. Exposita enim R, fiant RT = ℨq, & RP = ℨ: erit RT−RP = 2æ. Sunt autem RT & RT−RP mɤ: Quare per 22, P, T−P ɤ ad R. Et per 37 T est ɤ. Et per lem: 1, RT hoc est ℨq ɤ. Ergo ℨ ɤ.
√u:√q5 + √q3: pl: √u:√q5 − √q3. Q: est √q20 + √q8

43.44.45.46.27.48. Neque ulla ex dictis sex lineis ɤ, ℨ potest dividi in sua nomina a, e, præterquam in uno eodemque puncto. Nam aliter dividatur iterum ℨ in sua nomina A, E. Erit (per lem: 3) Z − ℨ = 2æ − 2Æ. At (per 37 & 40) in ℨ *Bin:* I, IV, Z − ℨ est ɤ; & 2æ − 2Æ mɤ, per 27. Et (per 38 & 41) in ℨ *Bin:* II. V, Z − ℨ est mɤ; & 2æ − 2Æ ɤ. Quare eadem quantitas erit ɤ & ɤ Quod est absurdum. In ℨ vero *Bin:* III, VI, Quoniam in 39 & 42, si supponatur ɤ ℨ dividi in a, e; fiatque RT = ℨq, & RP = ℨ, & RT − RP = 2æ; demonstratum est ɤ T dividi in nomina P, T − P ɤ⊤. Item si iterum supponatur ɤ ℨ dividi in A, E, alia nomina; fiatque RT = ℨq, & RS = Z & RT − RS = 2Æ; similiter demonstrabitur ɤ T. dividi iterum in nomina S & T − S ɤ⊤, divisa ab iis P & T − P: quod est contra priorem partem hujus demonstrationis. Est enim ɤ T *Binomium*.

Defini-

Definitiones	&	Proprietates
℞ *Binom: & Apotom:*		*Binomiorum & Apotom.*
I | 1, e ĸ ℸ : æ m		A ⊐ √qX : A ⊐ R
II | a, e m ℸ : æ ĸ		A ⊐ √qX : E ⊐ R
III | a, e m ℸ : æ m		A ⊐ √qX : AE ⊐ R
IV | a, e ℸ : ʒ ĸ : æ m		A ⊐ √qX : A ⊐ R
V | a, e ℸ : ʒ m : æ ĸ		A ⊐ √qX : E ⊐ R
VI | a, e ℸ : ʒ & æ m ⊐		A ⊐ √qX : AE ⊐ R

(Right margin of table, bracketing rows: AE ĸ ℸ; AE)

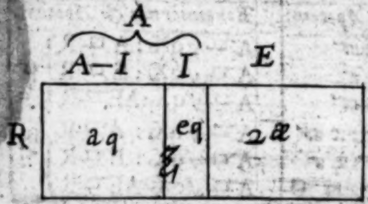
49.50.51.52.53.54. Invenire sex *Binomia* A+E. Sumatur N[9] & dividatur tum in 5 & [4]; tum in 6 & 3: & exponatur R.

Pro *Bin:* I.IV. Sit A ⊐ R; fiatque [9] $\frac{5}{6}$ :: Aq.Eq.

Pro *Bin:* II.V. Sit E ⊐ R; fiatque $\frac{5}{6}$ [9] :: Eq.Aq.

Pro *Bin:* III.VI. Sumatur tertius N (2), qui nec ad 9, nec ad 5, nec ad 6, ut Q.Q. fiatque 2. [9] :: Rq.Aq ĸ. Deinde [9] $\frac{5}{6}$ :: Aq.Eq ĸ: qui non sunt ut Q.Q. Quare in omnibus sex sunt A.E ĸ ℸ. Item [9] $\frac{[4]}{3}$ :: Aq. X.

55.56.57.58.59.60. Si singula sex *Binomia* A+E ducantur in expositum R: √q:AR+ER: constituet ordine singulas species ℞ *Binom.* Nam (consideratis prius intente proprietatibus cujusque tum *Binomii*, tum ℞ *Bin:* in tabella præmissa) dividatur A in A-I & I, ita ut AI-Iq=¼Eq. Erit igitur A-I. ½E:: ½E.I. fiat etiam aq=AR-IR: & eq=IR.



Probatur I°, a + e esse √q: AR+ER. Est enim AR–IR. ¼ ER :: ¼ ER. IR: Item aq.æ::æ.eq. Quare ¼ ER=æ. Ergo Q: a + e : = AR + ER.

Probatur II°, In tribus prioribus *Binom:* a, e esse ⅂. Nam quia (per 18) AR–IR ⊓ IR, erit AR–IR ⊓ AR : at AR ⅂ ER : ergo AR–IR ⅂ ER : hoc est aq ⅂ æ : Est autem aq.æ::a.e.

In tribus posterioribus *Binom:* a, e esse ⅂. Nam (per 19) AR–IR, IR, hoc est aq, eq ⊓.

Probatur III°, In *Bin:* I, a, e esse ʀ. Nam AR–IR, IR, hoc est aq, eq ⊓ sunt AR ʀ.

In *Bin:* II, a, e esse *m*: Nam quia A–I, I ⊓ A ⅂ R; Erit AR–IR, IR, hoc est aq, eq *m*: at a, e ⊓. Item æ esse ʀ: Nam 2æ = ER ʀ.

In *Bin:* III, a, e esse *m*, ut ante. Item æ esse ʀ: Nam ER hoc est 2æ *m*, quia E ʀ ⊓ R.

In *Bin:* IV. aq + eq, hoc est AR, esse ʀ. Nam A ʀ ⊓ R. Item 2æ, hoc est ER, esse *m*: ut ante.

In *Bin:* V, aq+eq, hoc est AR, esse *m*. Nam A ʀ ⅂. Item 2æ, hoc est ER, esse ʀ. Nam E ʀ ⊓ R

In *Bin:* VI, aq+eq, hoc est AR; Item 2 æ, hoc est ER, esse ⊓. Nam A,E ⊓ R.

Atque in omnibus his tribus posterioribus liquet a & e esse ⊓̸, quia aq, eq ⊓.

Consect: Latus quadratum singulorum *Binomiorum* A+E constituet ordine singulas species ⊓ *Bin:* a+e. Nam posita R esse 1, nihil per multiplicationem immutabitur. Unde majus quadratum erit A-I cujus latus est a: & minus quadratum I, cujus latus est e. Ostensum autem est ad prop: 34, in lem: pri: A-I esse $\frac{1}{2}$A+√u: $\frac{1}{4}$Aq-$\frac{1}{4}$Eq. Et I esse $\frac{1}{2}$A-√u: $\frac{1}{4}$Aq-$\frac{1}{4}$Aq-$\frac{1}{4}$Eq. Atque hinc patet Analysis *Binomii*: cujus hæc est regula.

Si è quadrato semissis nominis majoris tollatur quadratum semissis nominis minoris; & latus quadratum excessus semissi nominis majoris addatur, dabit quadratum majus: sin detrahatur, minus.

Si igitur semis nominis majoris, & latus quadratum excessus, sint commensurabiles, ⊓ *Bin:* erit bimembre. Si incommensurabiles, quadrimembre.

61.62 63.64.65.66. Si quadratum ex ⊓ a+e, ⊓ *Bin:* aliquo, ad expositum R adplicetur; latitudinem faciet A+E, idem *Binomium.* Nam (sicut in Schemate ad 55) fiat AR+ER = Q: a+e: Et AR-IR = aq. Et IR = eq: ideoque ER = 2æ. Probatur 1°.

In tribus prioribus *Binomiis*, A esse ⊓ √qX: Nam a, e ⊓̸; quare AR-IR, IR ⊓. Ergo per 18.

In tribus posterioribus *Binomiis*, A esse ⊓ √qX:

Nam a, e sunt ⊏⊐: quare AR - IR, IR ⊏⊐. Ergo.

Probatur II°, A, E esse ⊮⊐, &c. Nam in *Bin:* I A est ⊮⊏⊐ R; & E ⊮⊏⊐ R: est enim AR, hoc est aq+eq ⊮. & ER, hoc est 2 æ ⊏⊐ aq+eq, per lem 5.

In *Bin:* II, E est ⊮⊏⊐ R: & A ⊮⊏⊐ R: Est enim ER, hoc est 2 æ ⊮. Et AR, hoc est aq+eq, ⊏⊐ æ, per lem: 5.

In *Bin:* III, A & E sunt ⊮⊏⊐ R: Est enim AR, hoc est ℨ: & ER, hoc 2 æ ⊮.

In *Bin:* IV, A est ⊮⊏⊐ R: & E ⊮⊏⊐ R: est etiam AR, hoc est ℨ, ⊮; & ER, hoc est, 2 æ, ⊮. Et

In *Bin:* V. VI, similiter ex proprietatibus eorum poterit argui.

67. Si *Binomio* alicui A+E ⊏⊐ sit B+C; Erit etiam *Binomium* ordine idem. Nam fiat A+E. B+C:: A.B::E.C, ⊏⊐, per 14. & 16. Item per 15, Si A, √q: Aq-Eq ⊏⊐ sit vel ⊏⊐: Erit etiam B, √q: Bq-Cq: ⊏⊐ vel ⊏⊐.

68. Si in ℞ *Bin:* II. III, a, e ⊏⊐ b c: Erit *Bimediale* ordine idem. Nam fiat a+e. b+c:: a.b::e.c, ⊏⊐. Sunt autem a, e ⊮⊐: Ergo b, c, ⊮⊐ per 24 Item a.c::aq æ: Et b.c::bq.bc: quare aq.bq::æ.bc, ⊏⊐. Ergo si æ ⊮ sit vel ⊮; Etiam bc ⊮ vel ⊮ erit.

69. 70. 71. Si in tribus posterioribus ℞ *Bin:* a, e ⊐ b, c: Erit ℞ *Bin:* ordine idem. Nam fiat a+e. b+c::a. b::e.c, ⊐ saltem. Sunt autem a, e ⊐. Ergo b, c ⊐. Item quia aq. bq::eq. cq:: aq+eq. bq+cq, ⊐ saltem: Si aq+eq ⊮ vel ⊮; etiam bq+cq erit ⊮ vel ⊮. Denique quia aq.æ::a.c::b.c::bq,bc;

erit

erit aq.bq::æ.bc, ⊐̶ saltem. Si æ ʀ sit vel mʀ; etiam bc ʀ vel mʀ erit.

72. 73. Si duo spacia ζ & 2 æ componantur, quorum unum est ʀ, & alterum mediale; sitque ʀ majus; recta totum spacium potens erit ℞ Bin: I. vel IV. Sin mʀ majus; recta totum spacium potens erit ℞ Bin: II, vel V. Si vero duo spacia mʀ ⊐ componantur: recta totum spacium potens erit ℞ Bin: III, vel VI. Nam si ad expositam R adplicetur AR+ER=ζ + 2 æ, conjunctim & seorsim, nempe AR=ζ: & ER=2 æ; sive unum ex ipsiis sit ʀ, & alterum mʀ: sive utrumque mʀ ⊐̶. Clarum erit AR, ER esse ⊐, ideoque A, E ʀ ⊐̶. Quare si A ⊐ √qX, erit A+E unum ex tribus prioribus *Binomiis*. Si verò A ⊐ √q X, erit A+E unum ex tribus posterioribus *Binomiis*. Quodcunque autem ex ipsiis sex fuerit; latus illius (quod etiam est √u: ζ+2æ) erit ℞ Bin: ordine idem, per 55.56.57.58.59.60.

Principium Senariorum per detractionem.

74.75.76.77.78.79. Si ab á majore nomine cujusvis ℞ Bin: auferatur e nomen minus, Reliquum a−e erit ʀ, ℞ *Apotome* ejusdem ordinis: vocaturque vel *Apotome*, vel *Residuum mediale primum, vel Residuum mediale secundum, vel Minor, vel Cum rationali totum mediale faciens, vel Cum mediali totum mediale faciens.*

Nam Idem probari potest de ℰq, quod de ζq probatum

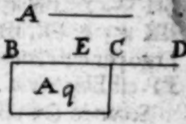
batum fuit, in 37.38.40.41. Sed pro ♃ *Apot:* III. vel VI, ad expositam R, fiant RP $=$ ℭq : & RT $=$ ʒ: Et RT−RP $=$ 2æ. Et reliqua fiant sicut in 39. & 42. Nam ʒ−2æ $=$ ℭq.

80.81.82.83.84.85. Lineis hisce sex ψ a−e, ♃ *Apot:* una tantum congruit recta linea e, pro minore nomine. Nam aliter constituatur linea ℭ, nempe a−e, etiam ex A−E. Per lem: 3, Z−ʒ $=$ 2Æ−2æ: At in ♃ *Apot:* I. IV, Z−ʒ est ψ, & 2Æ−2æ est *mr*. Et in ♃ *Apot:* II. V, Z−ʒ est *mr* : & 2Æ−2æ est ψ (per 37.38 40.41) : quare eadem quantitas est ψ & ψ : quod est absurdum : In ♃ vero *Apot:* III. VI. Quoniam (sicut est in 45 & 48) Si supponatur ψ & ℭ constitui ex a, e ; fiatque RP $=$ ℭq; RT $=$ ʒ : & RT−RP $=$ 2æ : demonstratum est ψ P constitui ex nominibus T, T−P, ψꝗ. Item si iterum supponatur ψ ℭ constitui ex A, E aliis nominibus ; fiatque RP $=$ ℭq : RC $=$ ʒ : & RC−RP $=$ 2æ. Similiter demonstrabitur ψ P constitui ex nominibus C, C−P (diversis a T & T−P) ψꝗ. Quod est contra priorem partem hujus demonstrationis. Est enim ψ P *Apotome*.

86. 87. 88. 89. 90. 91 92. 93. 94. 95. 96. 97 98. 99. 100. 101. 102. 103 104 105. 106. 107. 108 109. 110. 111	demonstrantur verbatim de ♃ sicut de ♃	49.50.51.42.53.54 55.56.57.58.59.60 61.62.63.64.65.66 67 68.69.70.71 72. 73.

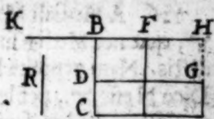
112. Eadem linea ψ non est *Apotome*, & *Binomium*.

mium. Nam esto A *Apotome*, puta ♃ *Apot:* I: Exposita R, fiat R×BC = Aq. quare per 98 & 61, BC erit *Apotome* 1; ei congruat CD. Sunt igitur BD, CD ɤ⊓⊔; & BD ⊓⊔ R. Rursus ponatur A *Binomium*, puta ♃ *Bin:* 1, fiatque R×BC = Aq: Erit per 61 BC *Bin:* 1: cujus nomina sint BE, CE, ɤ⊓⊔; & BE ⊓⊔ R. Sunt igitur & per 16, BD, BE, ED ɤ⊓⊔: ideoque ED, CD ɤ⊓⊔: quare CE *Apot:* ⊔ɤ. At CE fuit & ɤ. Quod est absurdum,



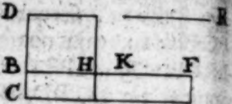
113.114. Rq adplicatum ad *Binomium*, latitudinem facit *Apotómen*. Sed adplicatum ad *Apotomen*, latitudinem facit *Binomium*. Utrobique autem nomina sunt ⊓⊔ & proportionalia, & utriusque ordo idem. Nam in utroque Schemate, fiat BC×BF = Rq = DC×BH ɤ⊓⊔. Est igitur BC.DC :: BH.BF: Et (BC -DC) BD.DC :: (BH-BF) FH.BF. His sic ordinatis.

Pro 113, Esto *Binomium* aliquod BC, scil: BD+DC: fiatque FH--BF.BF:.BF.BK. Est igitur (BF+BK) FK.BK :: FH.BF :: BD.DC, ɤ⊓⊔. Quare FK, BK ⊓⊔. Item (FK+FH) HK.FK :: (BK+BF) FK.BK, ⊓⊔. Et HK. BK :: HKq. FKq :: FKq :: FKq. BKq ⊓⊔. Unde & per 16, HK, BK, BH ⊓⊔: At BH ɤ: quare HK, BK ɤ⊓⊔: Et FK, BK ɤ⊓⊔. Ergo per def: FK−BK, scil: BF est *Apotome.*



Pro 114. Esto *Apotome* aliqua BC, scil: DC-BD: fiatque FH. BF::HK.FK:: (FH-AK.BF-BK) FK. BK::FH.BF::BD.DC ῥ⊓⊔. Quare HK.FK::FK. BK⊓⊔: Et HKq, FKq ⊓⊔.

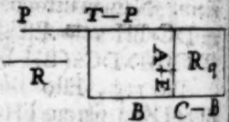
Unde & per 16, HK, BK, BH ⊓⊔. At BH ῥ: Itaque BK ῥ, & FK, BK ῥ⊓⊔. Ergo per def: BK+FK, scil: BF. est *Binomium*.



Secundò DC, BK ⊓⊔: Et BD, FK ⊓⊔. Nam BK ⊓⊔ BH ⊓⊔ DC. Et DC. BK::BD.FK. Ergo Tertiò proportionalia.

Quarto sunt in eodem ordine; per 15 & 14.

115. Si *Apotomes* T-P, & *Binomii* A+E nomina sint ⊓⊔ & proportionalia: Nempe T.A ⊓⊔::P.E ⊓⊔; Dico ▯ T-P in A+E esse ῥ. Nam exposita R, fiat A+E in C-B = Rq. Est igitur C-B *Apotome*, per 113: Et A. C ⊓⊔ :: E. B ⊓⊔ : Quare C.T ⊓⊔ :: C-B. T-P ⊓⊔ :: A+E in C-B ῥ. A+E in T-P etiam ῥ. Et √q: A+E in T-P; ῥ.



116. A Mediali M fieri poterunt innumeræ lineæ ῥ, quæ nec Mediæ sunt, nec ullæ ex bis senis antedictis. Nam exposita R, fiat MR; & sit N = √q MR. Dico N esse ῥ, per lem: 1: at nec mediale; per 23: nec ullam ex bis senis, per 61, 62, 63, 64, 65, 66, & 98, 99, 100, 101, 102, 103.

Deinde

	M	N	O	P
R	RM	RN	RO	

Deinde fiat RN. Et sit O $=\sqrt{q}$ RN: Dico O ℞ nec Mediale esse, nec ullam ex his senis illis.

Tertiò fiat OR, & sit P $=\sqrt{q}$ OR : Dico P ℞ esse nec Mediale, nec ullam &c. Et sic infinitum. Neque etiam ℞ N, O sunt eædem. Nam N $=\sqrt{q}$ MR. & O $=\sqrt{q}$ NR : &c.

117. Diameter quadrati est lateri incommensurabilis: Nam alias si sit ⊓⊓; esto Diameter ad Latus, ut numerus D ad numerum L; sintque minimi termini in eadem ratione : Et ipsorum quadrata sunt verè numeri quadrati. At verò L non potest esse 1; quia quadratum diametri ad quadratum lateris est ut 2 ad 1 : ideoque 2 esset numerus verè quadratus. Nec potest L esse numerus aliquis multitudinis : quia cùm sit Dq.L::2.1; & Lq metiatur Dq; etiam L metietur D : ideoque D & L non erunt rationis suæ termini minimi: Est enim numerus multitudinis maxima utriusque communis mensura.

Finis Elementi decimi Euclidis.

De

De solidis regularibus.

1. FIgura quævis polygona rectilinea dividitur in triangula duobus pauciora, quam sunt numeri laterum. Nempe quadrangulum dividitur in duo triangula : quinquangulum in tria; &c.

2. Quare si è numero laterum tollatur 2, & reliquus duplicetur : vel si è numero laterum duplicato tollatur 4: habebis summam angulorum rectorum in rectilinea quavis figura interius comprehensorum. Sic triangulum intra se continet duos rectos : quadrangulum quatuor : quinquangulum sex : &c.

3. Figuræ autem cujusvis rectilineæ anguli exteriores omnes æquantur quatuor rectis.

4. Quare si quatuor anguli recti dividantur per numerum laterum, sive angulorum : quotus erit quantitas unius anguli exterioris, in figura rectilinea ordinata. Sic angulus exterior in trigono ordinato est $\frac{4}{3}$ recti, sive grad: $\frac{360}{3}$: in tetragono ordinato $\frac{4}{4}$ recti, sive gradus $\frac{360}{4}$:in pentagono ordinato $\frac{4}{5}$ recti, sive gradus $\frac{360}{5}$, &c.

5. Si quantitas anguli exterioris tollatur ex duobus rectis : vel si summa angulorum rectorum interiorum dividatur in numerum laterum : habebis quantitatem unius anguli interioris, in figura rectilinea ordinata. Sequitur pars prior ex 4: posterior ex 2. Exempli gratia, In octogono ordinato, anguli unius exterioris quantitas est $2-\frac{4}{8}$ vel Gra: $180-\frac{360}{8}$. Item 8) 12(1 $\frac{4}{8}$ recti: vel Gra: 8) 12×90(135.

6. Tres

6. Tres anguli plani recti, vel gradus 270, includunt angulum rectum solidum.

7. Quare si omnes anguli plani includentes angulum solidum, addantur; & aggregatum per 3 angulos rectos, sive gradus 270, dividatur: habebis quantitatem totius anguli solidi. Exempli gratia, Anguli solidi Icosaëdri, quem quinque anguli trigoni ordinati includunt (nempe $5 \times \frac{2}{3}$ recti; vel Gra: 5×60) quantitas erit $\frac{10}{9}$ recti; vel Gra: $\frac{5 \times 60}{270}$.

Rursus anguli solidi Dodacaëdri, quem tres anguli pentagoni ordinata includunt (nempe $3 \times \frac{6}{5}$ recti; vel Gra: 3×108) quantitas est $\frac{6}{5}$ recti; vel Gra: $\frac{3 \times 108}{270}$.

Consect. Atque hoc modo invenientur mensuræ omnium quinque corporum regularium: Nempe Tetraëdri(4), $\frac{2}{3}$ recti, vel $\frac{180}{270}$. Hexaëdri (6), 1 rectum, vel $\frac{270}{270}$. Octaëdri (8), $\frac{8}{9}$ recti vel $\frac{240}{270}$. Icosaëdri (20), $\frac{10}{9}$ recti, vel $\frac{300}{270}$. Dodecaëdri (12), $\frac{6}{5}$ recti, vel $\frac{324}{270}$. Atque hi sunt ipsorum characteres.

8. Octo anguli recti solidi complent locum solidum. Quare si angulus solidus sit aliquota pars octo rectorum, vel Gra: $\frac{2160}{270}$: angulus ille solidus toties sumptus complebit locum solidum. Nempe anguli Tetraëdri 12: Hexaëdri 8: Octaëdri 9. Nam $\frac{2}{3}$)8(12. Et $\frac{8}{9}$)8(9.

9. Numerus angulorum planorum in solido quovis regulari, invenitur multiplicando numerum angulorum planorum unius basis in numerum basium. Nempe anguli plani sunt, in (4), 3×4: in (6), 4×6:

in

in (8), $3 * 8$: in (20), $3 * 20$: in (12), $5 * 12$.

10. Numerus angulorum solidorum in solido quovis regulari, invenitur dividendo numerum angulorum planorum in solido illo, per numerum angulorum planorum circa unum angulum solidum. Nempe anguli solidi sunt, in (4), $\frac{3 * 4}{3}$: in (6), $\frac{4 * 6}{3}$, in (8) $\frac{3 * 8}{4}$: in (20), $\frac{3 * 20}{5}$: in (12), $\frac{5 * 12}{3}$.

11. Numerus linearum lateralium in solido quovis regulari, est semis numeri angulorum planorum in illo solido. Atque hic etiam est numerus rectangulorum, sub latere, & lineâ perpendiculari è centro basis in latus. Nam unaquæque linea lateralis duobus inservit angulis.

12. Quare rectangulum sub latere, & linea perpendiculari è centro basis in latus, est superficiei totius, in (4), $\frac{1}{6}$: in (6) & (8), $\frac{1}{12}$: in (20) & (12), $\frac{1}{30}$. Est 6 & 7 e 14.

13. Solidum quodque regulare æquale est superficiei suæ trienti ducto in lineam perpendicularem è centro suo in basem.

14. Si linea ρ secetur secundum extremam & mediam rationem, ut σ sit majus segmentum, & τ minus: Dico $\sigma q = \rho\tau = \sigma\tau + \tau q$. per 11 & 3 e 2.

15. $Q:\frac{1}{2}\rho + \sigma: = 5Q:\frac{1}{2}\rho$. Nempe $\frac{1}{4}\rho q + \rho\sigma + (\sigma q)\ \rho\tau$. Est 1 & 2 e 13.

16. $Q:\frac{1}{2}\sigma + \tau: = 5Q:\frac{1}{2}\sigma$. Nempe $\frac{1}{4}\sigma q + (\sigma\tau + \tau q)\ \rho\tau$. Est 3 e 13.

Quare

Quare $\sigma . \tau :: \tau . \sigma - \tau$.

17. $\varsigma q + \tau q = 3 \sigma q$. Nempe $\sigma q + (2 \sigma \tau + \tau q + \varsigma q) 2 \varsigma \sigma$ Est 4 e 13.

18. $\varsigma + \tau . \varsigma :: \varsigma . \sigma$. Nempe $\varsigma + \sigma . \varsigma :: \sigma + \tau . \sigma$. Est 5 e 13.

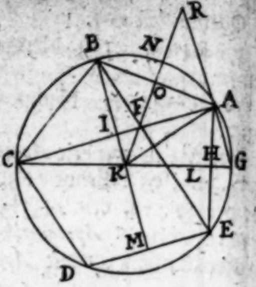
19. Si ς sit $\mathcal{R}$, σ erit *Apotome*. Nam quia per 15, $\frac{1}{2}\varsigma + \sigma . \frac{1}{2}\varsigma :: \sqrt{q5} . 1$: Erunt $\sigma + \frac{1}{2}\varsigma$, $\frac{1}{2}\varsigma$ $\mathcal{R} \sqcap$, per def: 6 e 10. Et per 37 e 10, erit $\sigma + \frac{1}{2}\varsigma + \frac{1}{2}\varsigma$ *Binomium*. Ergo per 74 e 10, $\sigma + \frac{1}{2}\varsigma - \frac{1}{2}\varsigma$ *Apotome*, hoc est σ.

Item si ς sit $\mathcal{R}$, τ erit *Apotome*. Nam per 61 & 98 e 10, $\frac{\sigma q}{\varsigma \mathcal{R}}$ (hoc est τ) *Apotome*. vide 14. Est 6 e 13.

20. Si ς sit subtendens angulum pentagoni ordinati; erit σ latus pentagoni. Dico in Schemate, AC. CF :: CF. AF : Et CF = CB = AB. Nam quia trianguli BCF, omnes tres ang = ^{10} recti : è quibus ang: BCF = $\frac{2}{5}$ recti ; & ang : CBF = $\frac{4}{5}$ recti : tertius igitur ang: CFB = $\frac{4}{5}$ recti: quare CF = CB = AB. Et quia liquet tri: ACB, BAF sim : Erit AC. AB :: AB. AF : Ergo. Est 8 e 13.

Consect. Et si ex angulo B per centrum, ad oppositum latus pentagoni, ducatur BKM, secans ipsam AC in I : secabitur etiam linea BM secundum extremam & mediam rationem in puncto I. Nam quia in tri: EBM, lateri EM parallela est FI : erit per 2 e 6, IM. IB :: FE. BF :: CF. FA. Ergo.

21. Si circuli alicujus radius sit σ, erit τ latus decagoni. Nam quia arcus ABC = 2GAN, erit ang: RKG = KGA = KAG : ideoque tri: RGK, KAG sim.



sim. Estque RG. KG:: KG. AG. Atque AR = KG, quia ang: $\frac{1}{2}$ RKG = KRG. Secatur igitur RG secundum mediam & extremam rationem in puncto A. Ergo latus decagoni AG est minus segmentum. Est 9 e 13. Quare etiam si 5 sit Radius, erit σ latus decagoni.

22. Perpendicularis KH vel KO, a centro in latus pentagoni ordinati, æquatur semisummæ Radii & lateris decagoni, Nempe KO = $\frac{1}{2}$RG = $\frac{1}{2}$ KR. Nam quia KR = RG; sublato utrinque radio, manebit RN = AG. Estque KO = RO, per 2 e 3. Est 1 e 14.

23. Quadratum lateris pentagoni ordinati, minus quadrato Radii, æquatur quadrato lateris decagoni: Nempe AEq - KGq = AGq. Nam quia AHq + GHq = AGq: Et quia KG secatur med: & extr: ratione in L; estque KL = AG: Erit AEq + GLq = 4AGq: Et per 17, KGq + GLq = 3AGq. Fiat subductio. Est 10 e 13.

24. Quadratum lateris pentagoni, plus quadrato lineæ subtendentis angulum pentagoni, æquatur quinque quadratis Radii. Nempe in schemate præcedente, AEq + CAq = 5KGq. Nam CAq + AGq = 4KGq: & per 23, AEq - AGq = KGq. Fiat additio. Est hæc 3 e 14.

25. S

25. Si circuli Radius sit rationalis, latus pentagoni inscripti erit irrationale, Nempe Minor. Nam quia triang: rect: AIC, AKF sim: erit CI. $\frac{1}{2}$ AC :: KF. $\frac{1}{2}$AF: ideoque 2CI. CK::KF. $\frac{1}{2}$ AF = FL, qui quadrans est Radii: Et CD+CK. CK::KL. FL. At per 2c, si CD sit σ, CK erit $\frac{1}{5}$: quare si FK sit σ, FL erit $\frac{1}{5}$: & per 15, KLq = 5FLq. Est autem BLq = 25FLq: quare BL. KL:: $\sqrt{q}25 . \sqrt{q}5$, per def: 6 e 10: Et sic ipsorum quadrata: unde etiam BLq. BLq-KLq :: 25. (25-5) 20:: 5. 4: Et BL. $\sqrt{u}$: BLq-KLq:: $\sqrt{q}5$. 2, Quare BL-KL, nempe BK est *Apotome* IV, per def: & 47 e 10: quippe ostensum est, A, E; A, $\sqrt{X}$; & A R. Item BCq = BKq+CKq = BKq+BK×BH (per 35 e 3) = BK× BH. Ergo per 95 e 10, BC est *Apot.* IV, hoc est Minor. Est 11 e 13.

26. In triang. rect. cujus Hypotenusa Z dividitur in segmenta A, E, perpendiculari ex angulo recto demisso, Erit 1°, ZA = Bq: & ZE = Cq: & AE = Mq.

II°, A.E::Aq.Mq::Mq.Eq::Bq.Cq
III°, Z.A::Zq.Bq::Bq.Aq::Cq.Mq
IV°, Z.E::Zq.Cq::Cq.Eq::Bq.Mq

O 27. Si

27. Si triangulum æquilaterum inscribatur circulo: 1° perpendicularis è centro in latus æquatur $\frac{1}{2}$ Radii. Ideoque altitudo Δi, sive perpendicularis è vertice in basem æquatur $\frac{3}{2}$ Radii. 2°, Q:dia. Q:lat: Δi::4.3: ideoque Q:Rad.Q:lat:Δi::1.3. Est 12 e 13.
3°, Q:lat.Q:alt:Δ::4.3. sc: 3.$\frac{3}{4}$. Est 12 e 14.
4°, Area trianguli æquilateri $\sqrt{\frac{27}{16}}$, æquatur quadrato mediæ proportionalis inter altitudinem & semissem lateris: vel inter latus & $\frac{1}{2}$ altitud. Est 29 e 14.
5°. Q:lat:Δi. Q:perpend: è cent: in bas::3.$\frac{1}{4}$ est. 18 e 14

28. Si quadratum inscribatur circulo: latus ipsius erit $\sqrt{2}$: Et Q:lat:□i. Q:dia::1.2.

29. Si eidem circulo inscribatur tum, triangulum æquilaterum, tum quadratum: 1°, Q:lat:Δi. Q:lat: □i::3.2: per 27 2°, & 28. Est 16 e 14.
2°, Q:alt:Δi. Q:lat:□i::9.8: per 27 3°, & 29 1°.
3°, Δ.□::$\sqrt{27}$.8: scil: $\sqrt{\frac{27}{16}}$.$\sqrt{4}$.

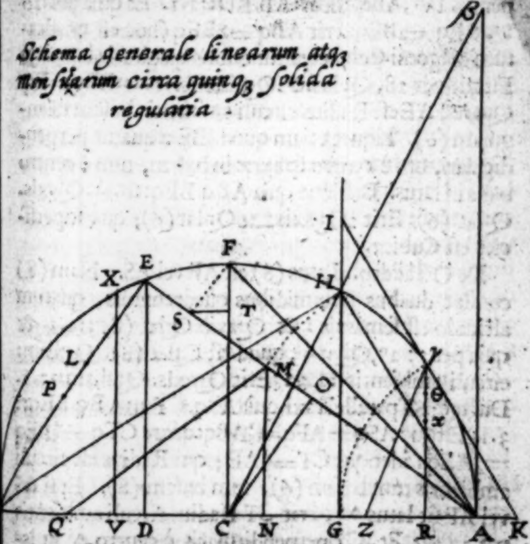
30. Latera quinque solidorum regularium exponere, & inter se comparare. Est 13,14,15,16,17,18, e 13. Esto AB vel ipsi perpendicularis Aβ, axis sphæræ, & C centrum: ducatur Cβ secans circulum sphæræ in H; ducaturque HG parallela ipsi Aβ: eritque GH=2CG; & per 47 e 1, Rq=5Q:½HG; & per 15; si HG sit σ, AG est σ; & per 21, si HG sit Radius, erit AG latus decagoni; & per 23, AH latus pentagoni.

Mensuretur CV=CG; & VX=GH. Et è centro erigatur CF; jungaturque AF. tum dividatur axis AB trifariam, sic ut BD sit $\frac{1}{3}$, & AD $\frac{2}{3}$: ducanturque per-

perpendicularis DE, & chordæ AE, BE. Secetur BE med: et extr: ratione in puncto L.

Statuaturque GI = BE; & IK ipsi AH parallela: Et sic erit GK = BL segmentum majus.

Schema generale linearum atque mensurarum circa quinque solida regularia.



His diligenter memoriæ mandatis, ad ipsa quinque corpora regularia declaranda pergemus.

De Tetraëdro. Latus (4) est AE; & DE Radius circuli ambientis basem ipsius triangulam. Nam per 16 IV°, AEq. DEq::AB.BD::3.1::Q: lati Δi. Q:

Rad: per 27 5°. Et CD & perpendicularis è centro sphæræ in basem, scil: $\frac{1}{6}$ axis. Et $\frac{1}{3}$ DE est perpendicularis è centro basis in latus, per 27 1°.

De Hexaëdro. Latus (6) Est BE vel GI. Nam per 26 IV, ABq.BEq::AB.BD::3.1. Et quia per 26 1°, AEq=2BEq: erit ABq=3BEq (hoc est quadratum diagonii Cubi æquatur tribus quadratis lateris): Estque per 28, Q: lat:□ⁱ.Q:dia circ::1.2::BEq.AEq. Quare $\frac{1}{2}$ AE est Radius circuli ambientis basem triangulam (6). Liquet etiam quod $\frac{1}{2}$BE æquatur perpendiculari, tum è centro sphæræ in basem, tum è centro basis in latus. Denique quia ABq.BEq::6.2::Q:axis. Q:lat:(6): Erit 2Q: axis=6Q: lat (6); quæ superficies est Cubica.

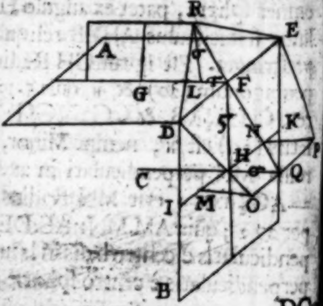
De Octaëdro. Latus (8) est AF vel AS. Nam (8) constat duabus pyramidibus quadrangulis, quarum altitudo est semiaxis: & Q:axis.Q:lat (8) ::2.1. & quia per 27 2°, Q:lat Δⁱ, quod est Q:lat (8). Q:diam: circuli ambientis::3.4: Erit Q: axis. Q: diam::3.2. Ductaq; ST parallela axi, quia ASq.CTq::ABq.BEq:: 3.1: Estque ASq=AFq=$\frac{1}{2}$ABq: quare CTq=$\frac{1}{2}$BEq =$\frac{1}{4}$AEq: ideoque CT=$\frac{1}{2}$AE; qui Radius est circuli ambientis tum basem (6), tum basem (8). Et si AS vel AF sit latus Δⁱ, erit CT Radius circuli ambientis per 27 2°. Et $\frac{1}{2}$CT perpendicularis è centro Δⁱ in latus, per 27 1°. Est autem superficies (6)=12 BE×$\frac{1}{2}$BE; & superficies (8)=12AF×$\frac{1}{2}$CT, quod satis liquet: Quare BE×$\frac{1}{2}$BE. AF×$\frac{1}{2}$CT::superf: (6).superf: (8):: (6).(8)::BE.AC. Est 27 e 14. Quoniam AFq.ACq:: BEq.CTq=$\frac{1}{2}$BEq. De

De Icosaëdro. Latus)20) est AH vel AM. Nam Radiis GH & VX æqualibus cogitentur duo circuli describi, perpendiculariter insistentes plano AHXB; atque in ipsis includi, tum pentagonum ordinatum lateris AH, tum decagonum lateris AG : sic ut punctum H sit angulus pentagoni, & X decagoni : unde anguli pentagoni in uno circulo perpendiculariter imminebunt angulis decagoni in altero, ad distantiam GV=GH. Et è singulis angulis unius pentagoni ducantur duæ hypotenusæ ad angulos alterius utrinque proximos : Item ex singulis angulis utriusque pentagoni, in proximum axis terminum A vel B, ducantur hypotenusæ : Quæ quidem omnes, hypotenusæ erunt triangulorum rectangulorum, quorum Cathetus æqualis est Radio GH, & basis lateri decagoni AG; ideoque singulæ æquales lateri pentagoni AH. Quare descripta erit figura constans 20 triangulis æquilateris & æqualibus. Includi autem angulos illos omnes sphæra, patet ex angulo H : nam circumvolutus semicirculus AHXB reliquos similiter angulos perstringet. Est igitur GH Radius circuli ambientis pentagonum (20); & ɤr quia 5.1::CHq.GHq: est autem CH=½AB, & CG=½GH : Atque id circo AH latus (20) est ɤr, nempe Minor, per 25. Tum demissa MN perpendiculari in axem, statuatur MQ=AC,½ axis : erit MN Radius circuli circa basem, per 27 2°; quia AM.MN::AE.DE::3.1: Et ½ MN perpendicularis è centro basis in latus, per 27 1°: Et NQ perpendicularis è centro sphæræ in basem; quia ibi Q

 est

est instar centri sphæræ. Denique BEq. GHq::5.3: Nam BEq. ABq::1.3: & ABq. GHq::CHq. CGq:: 5.1.

De Dodecaëdro. Latus (12) est BL vel GK, in præcedente schemate: & BE vel GI (latus (6)) subtendit angulum basis pentagonæ (12). Nam in sequente schemate, describantur duæ bases (6), AD EB, quarum commune latus est DE; & centrum sphæræ C; & centrum basis unius G, alterius H. A centro G ducatur GF perpendicularis lateri DE; & per centrum H ducatur IHK ipsi DE parallela. Erunt igitur GF,HI,HK, semisses lateris (6): secentur singulæ in στ punctis L,M,N; ut majus segmentum sit ubique centro proximum: & in punctis L,M,N, erigantur tres perpendiculares LR,MO,NP, æquales ipsi majori segmento: & ducatur OP, latus (12): est enim IK.OP::ς.σ::BE.BL, schematis præcedentis. Ducantur etiam DO,DR,EP,ER, quæ cum OP includunt pentagonum, basem quidem (12). Nam



1°. Pentagonum DOPER est in uno plano: Est enim RFQ una recta linea, per 32 e 6.

2°, Est æquilaterum: est enim

DOq = MOq pl. DIq + IMq, hoc eſt, 3MOq, per 17. At etiam 4MOq = OPq. Et ſic de cæteris.

3°, Eſt æquiangulum: Eſt enim DPq = DIq pl. INq + NPq, hoc eſt, 3DIq, per 18 & 17. At etiam 4DIq = DEq. Et ſic de cæteris.

4°, Circumſcribitur ſphæra: Eſt enim CPq = CQq + QPq, hoc eſt, 3CHq, per 18 & 17. at Q:axis. Q:lat(6)::3.1::Q:$\frac{1}{2}$axis. Q:$\frac{1}{2}$lat(6). Et ſic de reliquis.

5°, Circa (6) deſcribentur 12 ejuſmodi pentagona: Cum enim per II, ſint in (6) latera 12; unicuique lateri ſuum adhærebit pentagonum; ſicut in menti perſpicuum erit.

6°, Latus (12) eſt Apotome: Eſt enim DE latus (6) ϰ⌐ ⊐ axi: at per 19, ſi ς (DE) ſit ϰ, σ (OP) erit Apotome.

His ſic oſtenſis, ad prius illud ſchema redeundum denuò erit: In quo menſuretur Kγ = KG = BI lateri(12): & demittatur γR. Erit per 23, γR Radius circuli circa baſem pentagonam: Et per 22, Rϑ, ſcil: $\frac{1}{2}$Rγ + $\frac{1}{2}$RK, eſt perpendicularis è centro baſis in latus. Eſt autem Rγ = MN: Nam quia (3 BEq) 3GIq = Q: axis = 5GHq: erit 5.3::GIq. GHq :: GKq. GAq:: GIq + GKQ. GHq + GAq: hoc eſt, per 20 & 24: 5Rγq. AMq = 3MNq, per 26 IV°. Quare 3×5Rγq = 5×3MNq. Eſtque QN perpendicularis à centro ſphæræ in baſem. Eſtque ſuperficies(20) = 30 AH×$\frac{1}{2}$MN: & ſuperficies (12) = 30GK×Rϑ, quod ſatis conſtat. Quare AH×$\frac{1}{2}$MN. GK×Rϑ::ſuperf (20). ſuperf(12):: (20).(12).

26. Si axis sphæræ æqualis sit, tum √u: ςq+ :q unius lineæ; tum √u:ςq+τq alterius lineæ: erit σ latus (20); & τ latus (12). Nam in Schema priore generali, ς.σ:: GH.AG::BH.AH: At ABq=BHq+AHq. Item ABq=3BEq=Q:BE+BL: pl BLq: hoc est, 3ςq=Q:ς+τ: pl σq. Est enim σq=ςτ. Est 23 e 14.

27. √u:ςq+σq. √u:ςq+τq::lat (6). lat (20) hoc est, Kγ. Zγ :: BE.AH, vel GI.AM: secta scil: KZ=Rγ med: & extr: ratione in puncto R. Nam per 26 IV°, AMq=3Rγq: Et per 17, Zγq=3RKq. Quare AM. Zγ::Rγ. RK::ς.σ::GI.KG. Est 10 e 14.

38. Latus (6). Latus (20)::superf (12). superf (20). hoc est GI. AM:: KG×Rϑ. AM×$\frac{1}{3}$Rγ. Nam KG×Rϑ=GI×$\frac{1}{3}$Rγ. Est enim GI.KG::ς.σ::Rγ+RK. Rγ::($\frac{1}{3}$Rγ+$\frac{1}{3}$RK) Rϑ. $\frac{1}{3}$ Rγ, per 18. Est 9 e 14.

39. Q: perpendic: è centro sphæræ in basem (4). Q: perpend: è centro sphæræ in basem (8) :: 1.3:: CDq. $\frac{1}{4}$BEq.

40. Q: lat (4). Q: lat (8)::Basis (4). Basis (8). Nam AEq.ABq::2.3: Et ABq.AFq::4.2. Est 14 e 14. Hinc consectarium est,

Quod, Superf (4). superf (8)::2.3: scil: 4×4.8×3.

41. Q: (4). Q: (8) :: 4.27. per 39 & consect: 40:

Nempe × $\left\{\begin{matrix} 1.\ 3 \\ 2.\ 9 \end{matrix}\right\}$. Est 17 e 14.

42. Basis (6). Basis (8)::8.√27: Nempe $\frac{4}{3}$.√$\frac{1}{4}$.

43. Basis (4). Basis (6)::√3.2::altit: Δ¹(4). latus Δ¹(4): nempe $\frac{1}{2}$ BE. AE. Est 30 e 14.

44. Superf (4). Superf (6) ::1.√3: Nempe

$\sqrt{\frac{4}{3}} \times 4.8$: hoc est, Δ^{m} (4) $\times$ 4. 2Q: axis.

45. Tria (4) = (6): per 44 & 39: Nempe $\times \begin{Bmatrix} 1.\sqrt{3} \\ 1.\sqrt{3} \end{Bmatrix}$ est 32 e 14. Hinc consectarium est,

Quod $\begin{cases} \text{Prisma basis \& altitudinis (4) = (6). Et} \\ \text{Pyramis basis \& altitudinis (6) = (4).} \end{cases}$

46. (8). 3 (4) :: latus (8). latus (4): Nempe 2. ($\sqrt{\frac{16}{27}} \times 3$) $\sqrt{\frac{16}{3}}$ :: $\sqrt{2}$. $\sqrt{\frac{8}{3}}$. Est 22 e 14.

47. Si latus (8) = $\sqrt{u}$: $\sigma q + \tau q$, erit latus (20) = $\sqrt{2\tau q}$. Nam BH+HA secatur med: & extr: ratione in H: Estque $2\sigma q + 2\tau q$ = 2AFq = ABq = BHq+AHq. Ergo AHq = $2\tau q$. Est 24 e 14.

48. Si latus (8) = $\sqrt{u}$: $\frac{1}{2}\sigma q + \frac{1}{2}\tau q$, Erit latus (12) = τ. Nam GI+GH secatur med: & extre: ratione in G: Estque $\sigma q + \tau q$ = 2AFq = ABq = 3GIq = Q: GI+GK: + GKq. Ergo GKq = τq. Est hæc 25 e 14.

49. Si latus (4) = $\sqrt{u}$: $\sigma q + \tau q$, erit latus (20) = $\sqrt{\frac{2}{3}\tau q}$. Nam BH+HA secatur media & extr: ratione in H: & $\frac{2}{3}\sigma q + \frac{2}{3}\tau q$ = $\frac{2}{3}$AEq = ABq = BHq +AHq. Ergo AHq = $\frac{2}{3}\tau q$. Est hæc 26 e 14.

50. Si latus (6) = $\sqrt{u}$: $\sigma q + \tau q$, erit latus (20) = $\sqrt{3\tau q}$. Nam BH+AH secatur med: & extr: ratione in H: & $3\sigma q + 3\tau q$ = 3GIq = ABq = BHq+AHq. Ergo AHq = $3\tau q$

51. Si latus (6) = $\sqrt{u}$: $\sigma q + \tau q$, erit latus (12) = $\sqrt{3\tau q}$. Nam GI+GK secatur med: & extrem: ratione in H: & $3\sigma q + \sigma q$ = 3GIq = Q: GI+GK: + GKq. Ergo GKq = $3\tau q$.

52. Si axis sphæræ sit τ, superficies tum (4), tum

rum (8), erit $\varpi\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!$ mr. Nam quia 3.2::Q:axis. AEq: erit Q:lat:(4)=$\frac{1}{1}$Q:axis: est etiam Q:lat:(8)=$\frac{1}{3}$Q:axis: scil: utrumque ℞: quare & ipsorum latera sunt ℞. At in Δ^o, per 27,3*, Latus. altitud::2.$\sqrt{3}$, ℞ ⊐. ergo per. 22 e 10, area Δ^i est mr. Est 13 e 14.

Notandum autem, quod in his quæ tum de elemento X, tum de V corporibus regular: scripta sunt, propositionum numerus est juxta Ch: Clau.

Corporum

Corporum quinque regularium mensura, ad axem sphæræ 2. Consulatur Schema generale.

I. *In Tetraëdro.*

AE latus (4), est $\sqrt{\frac{8}{3}}$: 1,632932.
DE semidiameter circuli ambientis basem triangulam (4), est $\sqrt{\frac{8}{9}}$: 0,942809.
Altitudo basis, est 1,414213.
Area basis (4), est 1,154657.
Superficies (4), est 4,618628.
CD perpendicularis è centro sphæræ in basem (4), est $\frac{1}{3}$, 0,333333.
Soliditas (4), est 0,513216.

II. *In Hexaëdro.*

BE latus (6), eſt $\sqrt{\frac{4}{3}}$: 1,154700.

CT eſt ſemidiameter circu'i ambientis baſem quadrangulam (6), $\sqrt{\frac{2}{3}}$: 0,816490.

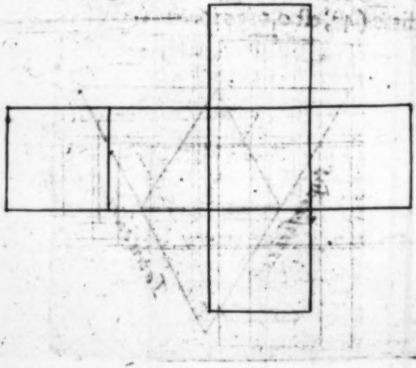
Area baſis (6), eſt $\frac{4}{3}$: 1,333333.

Superficies (6), eſt 8: Nempe bina quadrata axis, ſphæræ.

$\frac{1}{2}$BE perpendicularis è centro ſphæræ in baſem (6) eſt $\sqrt{\frac{1}{3}}$: 0,577175.

Soliditas (6), eſt 1,539600.

Superficies Hexaëdri.



III. *In Octaëdro.*

AF latus (8), est $\sqrt{2}$: 1,414213.

CT est semidiameter circuli ambientis basem triangulam (8), est $\sqrt{\frac{2}{3}}$: 0,816490.

Altitudo basis (8), est 1,224735.

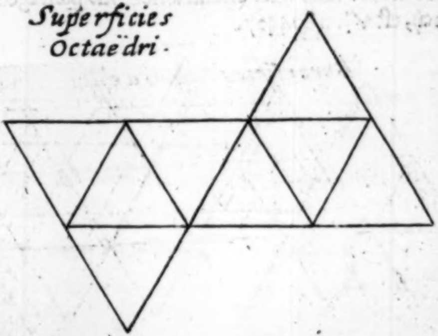
Area basis (8), est 0,866018.

Superficies (8), est 6,928144.

BE perpendicularis è centro sphæræ in basem (8), est $\sqrt{\frac{1}{3}}$: 0,577175.

Soliditas (8), est 1,333333.

Superficies Octaëdri.



IV. *In Icosaëdro.*

AH latus (20), est $\sqrt{u}$: $2-\sqrt{\frac{4}{5}}$: 1,105573.

MN = Rγ semidiameter circuli ambientis basem triangulam (20), est $\sqrt{u}$: $\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{4}{45}}$: 0,607062.

Altitudo basis (20), est 0,910593.

Area basis (20), est 0,503362.

Superficies (20), est 10,067240.

QN perpendicularis è centro sphæræ in basem (20) est $\sqrt{u}$: $\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{4}{45}}$: 0,794654.

Soliditas (20), est 2,666658.

GH est semidiameter circuli ambientis pentagonum (20), est $\sqrt{\frac{4}{5}}$: 0,894427.

Superficies Icosaëdri.

V. *In Dodecaëdro.*

GK = BL latus (12), eſt $\sqrt{\tfrac{5}{3}} - \sqrt{\tfrac{1}{3}}$: 0,713642.

Rγ = MN ſemidiameter circuli ambientis baſem quinquangulam (12), eſt $\sqrt{u}\!:\tfrac{2}{3} - \sqrt{\tfrac{4}{45}}$: 0,607062.

Rθ = $\tfrac{1}{2}$Rγ + $\tfrac{1}{2}$RK, perpendicularis è centro baſis in latus, eſt 0,49112.

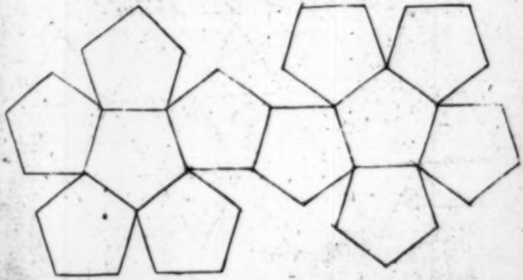
Area baſis (12), eſt 0,876211.

Superficies (12), eſt 10,514532.

QN perpendicularis è centro ſphæræ in baſem (12), eſt $\sqrt{u}\!:\tfrac{1}{3} + \sqrt{\tfrac{4}{45}}$: 0,794654.

Soliditas (12) eſt 2,785137.

Superficies Dodecaëdri.



FINIS.